UNIVERSIDAD NACIONAL

"SANTIAGO ANTÚNEZ DE MAYOLO"

FÍSICA GENERAL I

PARA ESTUDIANTES DE CIENCIAS E INGENIERÍA

Mag. OPTACIANO L. VÁSQUEZ GARCÍA

Profesor de Física de la Facultad de Ciencias

HUARAZ – PERÚ

2010

CAPITULO V

CINÉTICA DE UNA PARTICULA: *Trabajo y Energía*

I. INTRODUCCIÓN

En esta sección se continua analizando la cinética de una partícula, es decir nos limitaremos a la observación de una partícula reduciendo sus interacciones con el resto a un solo término "Fuerza". Las leyes de newton relacionan instantáneamente las fuerzas que actúan sobre una partícula con las aceleraciones producidas. Para conocer la velocidad o posición en función del tiempo, es necesario integrar la aceleración obtenida, dicha integración es inmediata si la aceleración es constante. Sin embargo, cuando la aceleración es función de la posición de la partícula el problema puede resolverse fácilmente aplicando el principio del trabajo y la energía cinética.

II. EL TRABAJO DE UNA FUERZA.

Consideremos una partícula de masa *m* que se mueve a lo largo de una trayectoria curva C bajo la acción de la fuerza $\vec{F}$, como se muestra en la figura 5.1,

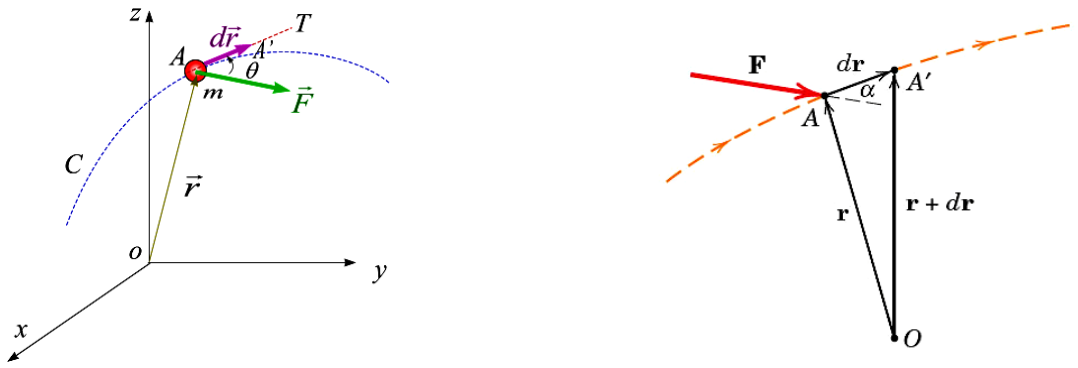


Figura 5.1.

Debe observarse que en el instante de tiempo *t*, su posición instantánea será $\vec{r}$, y en un tiempo muy corto *dt* la partícula se moverá desde la posición A hasta la posición A', experimentando un desplazamiento representado por el vector $\overrightarrow{AA'}$, expresado por la ecuación

$$\overrightarrow{AA'} = d\vec{r} \tag{5.1}$$

En mecánica, el trabajo *dU*, efectuado por la fuerza $\vec{F}$, durante el desplazamiento $d\vec{r}$, es definido como el producto escalar de la fuerza escalarmente el desplazamiento, es decir

$$dU = \vec{F}.\ d\vec{r} \tag{5.2}$$

Designando a la magnitud del vector desplazamiento $|d\vec{r}|$, a la cantidad *ds*, el trabajo puede expresarse en la forma

$$dU = \left|\vec{F}\right|\left|d\vec{r}\right|\cos\theta = F\,ds\ \cos\theta \tag{5.3}$$

En donde, θ es el ángulo formado por los vectores fuerza $\vec{F}$ y el desplazamiento $d\vec{r}$. Por tanto, de la ecuación (5,3) se deduce que:

i. Si el ángulo θ es agudo ($0 \leq \theta < 90°$), el trabajo es positivo.
ii. Si el ángulo θ es obtuso ($90 \leq \theta < 180°$), el trabajo es negativo.
iii. Si el ángulo θ es 90°, el trabajo es nulo.

Existen tres caos de especial interés

a) Si la fuerza $\vec{F}$ tiene la misma dirección y sentido que el desplazamiento $d\vec{r}$, el trabajo se escribe $dW = F\,ds$.

b) Si la fuerza $\vec{F}$ tiene la misma dirección pero el sentido opuesto al desplazamiento $d\vec{r}$, el trabajo se escribe $dW = -F\,ds$.

c) Si la fuerza $\vec{F}$ es perpendicular al desplazamiento $d\vec{r}$, el trabajo se escribe es nulo o cero.

2.1. Trabajo de una fuerza variable

Si la fuerza que actúa sobre la partícula de masa *m* es variable y produce un desplazamiento finito a lo largo de la trayectoria desde la posición s_A hasta la posición s_B, como se muestra en la figura 5.2a.

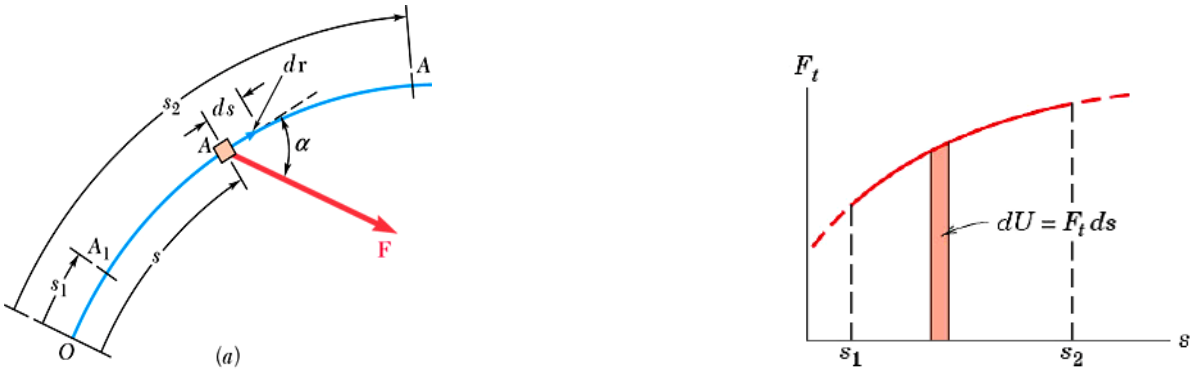


Figura 5.2

El trabajo $U_{A\to B}$ desarrollado por la fuerza $\vec{F}$, se obtiene sumando (integrando) la ecuación (5.2) o (5.3), es decir

$$U_{A\to B} = \int_A^B \vec{F}.\,d\vec{r} = \int_{s_A}^{s_B} F\,ds\,\cos\theta \tag{5.4}$$

Si ahora graficamos la componente de la fuerza en la dirección del desplazamiento ($F_t = Fcos\theta$), en función de la posición *s*, como se muestra en la figura 5.2b, la integral de la ecuación (5.4) representa el área bajo la curva entre las posiciones A y B.

Si la fuerza $\vec{F}$, es expresa en componentes rectangulares ($\vec{F} = F_x\hat{\imath} + F_y\hat{\jmath} + F_z\hat{k}$) y el vector desplazamiento en componentes rectangulares $d\vec{r} = dx\hat{\imath} + dy\hat{\jmath} + dz\hat{k}$, el trabajo de la fuerza, puede expresarse en la forma

$$U_{A\to B} = \int_A^B F_x\hat{\imath} + F_y\hat{\jmath} + F_z\hat{k}\;.\;dx\,\hat{\imath} + dy\;\hat{\jmath} + dz\;\hat{k}\;\; = \int_A^B F_x dx + F_y dy + F_z dz \tag{5.5}$$

2.2. Trabajo de varias fuerzas

Cuando sobre una partícula de masa m, actúan varias fuerzas $\vec{F}_1;\ \vec{F}_2;\ \vec{F}_3;\ \ldots\ldots\ldots\ldots\vec{F}_n$, como se muestra en la figura 5.3. Los trabajos efectuados por cada una de las fuerzas en un desplazamiento $d\vec{r}$ serán

$$dU_1 = \vec{F}_1.d\vec{r};\;\; dU_2 = \vec{F}_2.d\vec{r};\;\; dU_3 = \vec{F}_3.d\vec{r};.....;dU_n = \vec{F}_n.d\vec{r} \tag{5.5}$$

El trabajo total o neto sobre la partícula en dicho desplazamiento será

$$dU = dU_1 + dU_2 + dU_3 + ... + dU_n = \vec{F}_1.d\vec{r} + \vec{F}_2.d\vec{r} + \vec{F}_3.d\vec{r} + ... + \vec{F}_n.d\vec{r}$$

$$dU = (\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + ... + \vec{F}_n).d\vec{r}$$

$$dU = \sum \vec{F}_i \cdot d\vec{r} \qquad (5.6)$$

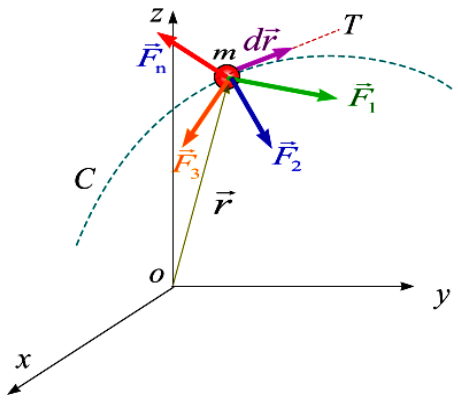


Figura 5.3

2.3. Trabajo de una fuerza constante en un movimiento rectilíneo

Si una caja es arrastrada por el piso como se muestra en la figura 5.4a mediante la aplicación de una fuerza constante de magnitud y dirección constante P.

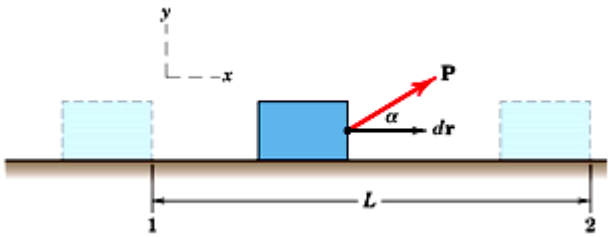


Figura 5.4

El trabajo desarrollado por la fuerza $\vec{P}$ durante el desplazamiento $d\vec{r}$, viene expresado como

$$U_{1\to 2} = \int_{x_1}^{x_2} \vec{P}.d\vec{r} = \int_{x_1}^{x_2} P\cos\alpha\, dx = P\cos\alpha \int_{x_1}^{x_2} dx$$

$$U_{1\to 2} = F\cos\alpha\ (x_2 - x_1) = F\cos\alpha\ (L) \qquad (5.7)$$

2.4. Trabajo de una fuerza constante en un movimiento curvilíneo

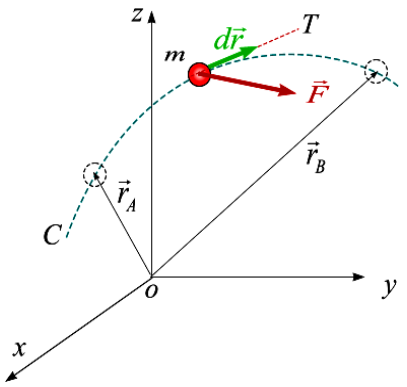
Cuando una partícula de masa m se mueve en una trayectoria curvilínea bajo la acción de una fuerza $\vec{F}$ de magnitud y dirección constante desde la posición A hasta la posición B, como se muestra en la figura 5.6a, el trabajo de dicha fuerza para este desplazamiento será

$$U_{A\to B} = \int_A^B \vec{F}.d\vec{r} = \vec{F}.\int_A^B d\vec{r}$$

$$U_{A\leftarrow B} = \vec{F}.(\vec{r}_B - \vec{r}_A) \qquad (5.7)$$

La ecuación (5.7) indica que si la fuerza es constante en magnitud y dirección y el movimiento es curvilíneo, el trabajo es independiente de la trayectoria seguida y depende únicamente del producto escalar de la fuerza $\vec{F}$ por el desplazamiento $(\vec{r}_B - \vec{r}_A)$. Uno de los ejemplos de este tipo de movimiento es el movimiento de una partícula

sometido a la acción de su propio peso (*mg*) como el movimiento del niño sobre el canal curvilíneo mostrado en la figura 5.6b



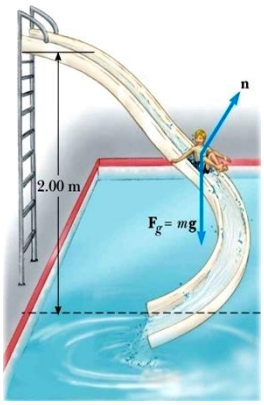


Figura 5.5

2.5. Trabajo de la fuerza gravitacional (peso).

Consideremos el movimiento curvilíneo hacia arriba de una partícula de masa *m*, desde la posición **1** ubicada a una altura y_1 hasta la posición **2** ubicada a una altura y_2 mediada con respecto al plano horizontal, como se muestra en la figura 5.6.

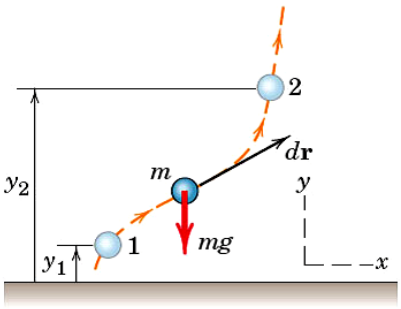


Figura 5.6

El trabajo desarrollado por la fuerza gravitacional (***mg***) durante el movimiento de *m* desde la posición **1** hasta la posición **2** será

$$dU = -mg\ \hat{j}.(dx\hat{i} + dy\hat{j}) = -mg\ dy$$

$$U_{1\to 2} = -\int_{y_1}^{y_2} mg\ dy = mgy_1 - mgy_2$$

$$U_{1\to 2} = -mg(y_2 - y_1) = -mg\Delta y \qquad (5.8)$$

La ecuación (5.8) indica que el trabajo del peso es independiente de la trayectoria seguida y solo depende del producto del peso (W = mg) por la altura vertical Δy. El trabajo será positivo cuando $\Delta y < 0$, es decir cuando el cuerpo desciende y será negativo cuando $\Delta y > 0$, es decir cuando el cuerpo asciende.

2.6. Trabajo de una fuerza elástica

Cuando una partícula se encuentra unida a un resorte deformado, como se muestra en la figura, ella experimentará una fuerza elástica $\vec{F}_e$.

Si el resorte es lineal, la ley de Hooke establece que dicha fuerza es proporcional a la deformación del resorte y de sentido opuesto a éste, expresada por la ecuación

$$\vec{F}_e = -kx\,\hat{i} \tag{5.9}$$

Donde ***k*** es la constante de proporcionalidad denominada *rigidez del resorte* y x es la deformación experimenta a tracción o compresión por el resorte

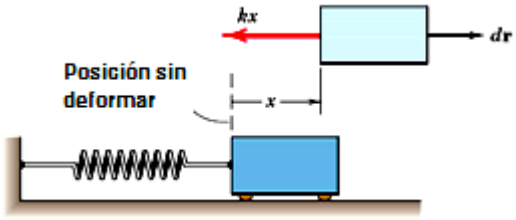


Figura 5.7

El trabajo de la fuerza elástica durante un desplazamiento $d\vec{r}$ será

$$dU = (-F_e\hat{i}).(dx\hat{i}) = -kx\,dx \tag{5.10}$$

Para determinar el trabajo de la fuerza elástica durante un desplazamiento finito como el mostrado en la figura 5.8a. Es decir, durante el desplazamiento que va desde la posición A_1 cuando la deformación es x_1 hasta la posición A_2 donde la deformación es x_2, se obtiene integrando la ecuación (5.10), obteniéndose

$$U_{1\to 2} = -\int_{x_1}^{x_2} kx\,dx = -(\tfrac{1}{2}kx_2^2 - \tfrac{1}{2}kx_1^2) \tag{5.11}$$

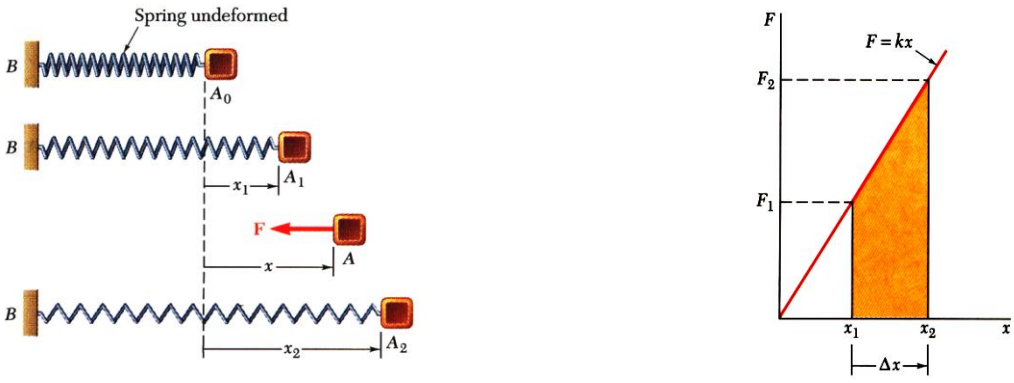


Figura 5.9

Al graficar la magnitud de la fuerza elástica de la ecuación (5.9) se obtiene una línea recta que pasa por el origen de coordenadas y su pendiente es la rigidez k del resorte. El trabajo de la fuerza elástica también se puede determinar mediante el área del trapecio de dicha gráfica entre las posicione A_1 y A_2 como se muestra en la figura 5.9b. Es decir matemáticamente este trabajo se expresa en la forma

$$U_{1\to 2} = -\tfrac{1}{2}\ F_1 + F_2\ \ \Delta x \tag{5.12}$$

Las ecuaciones (5.12) y (5.13) expresan que al igual que el trabajo de un peso, el trabajo de una fuerza elástica es independiente del camino seguido es decir solo depende de las deformaciones inicial y final que experimenta el resorte.

2.7. Trabajo de una fuerza gravitacional de acción a distancia.

Cuando una partícula de masa m (luna) gira alrededor de otra de masa M (tierra) a una distancia r, como se muestra en la figura 5.10a, experimentará una fuerza central dirigida hacia el centro O de la tierra como se muestra en la figura 5.10b que según la ley de gravitación universal se expresa en la forma

$$\vec{F}_g = -G\frac{mM}{r^2}\hat{e}_r \tag{5.13}$$

Donde: G = 6,67.10^{-11} Nm^2/kg^2, r es la distancia entre el centro de los cuerpos y $\hat{e}_r$ es un vector unitario radial y saliendo de O.

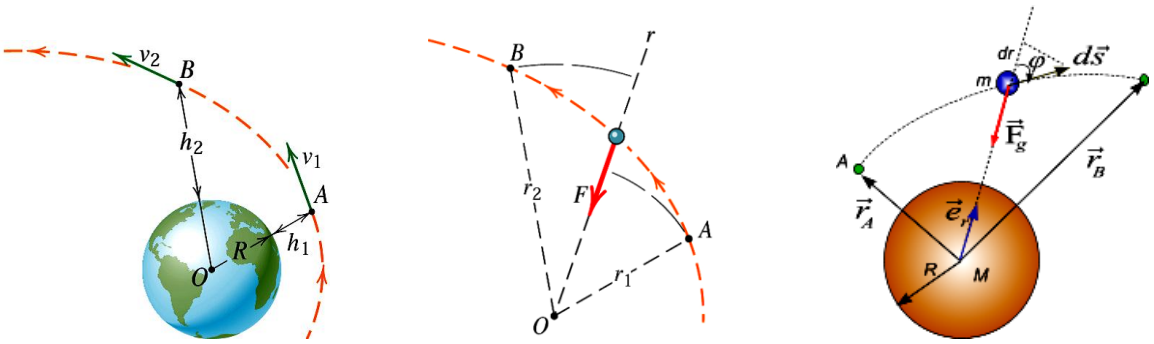


Figura 5.9

Para determinar el trabajo de la fuerza gravitacional consideremos el movimiento de *m* desde A hasta B como se muestra en la figura 5.9c. El trabajo desarrollado por la fuerza gravitacional $\vec{F}_g$ durante un desplazamiento $d\vec{s}$, es

$$dU = -\vec{F}.d\vec{s}$$

$$dU = [-G\frac{Mm}{r^2}\hat{e}_r][dr\hat{e}_r + rd\varphi\hat{e}_\varphi] \tag{5.14}$$

El trabajo total será

$$W_{A\to B} = \int_{r_A}^{r_B}\vec{F}_g.d\vec{s} = \int_{r_A}^{r_B}\left(-G\frac{Mm}{r^2}\hat{e}_r\right).(dr\hat{e}_r + rd\varphi\hat{e}_\varphi)$$

$$W_{A\to B} = -GMm\int_{r_A}^{r_B}\frac{dr}{r^2} = GMm\left(\frac{1}{r}\right)\Bigg|_{r_A}^{r_B}$$

$$W_{A\to B} = GMm\left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A}\right) \tag{5.15}$$

Esta ecuación muestra que el trabajo es independiente de la trayectoria seguida por *m* y solamente depende de la posición inicial y final, respectivamente.

III. EL PRINCIPIO DEL TRABAJO Y LA ENERGÍA CINÉTICA

Consideremos una partícula de masa *m* que en determinado instante está localizada a una distancia *s* del extremo de una trayectoria curva C, como se muestra en la figura 5.10. El vector $\vec{r}$ localiza a la partícula con respecto al marco inercial de referencia *x, y, z*.

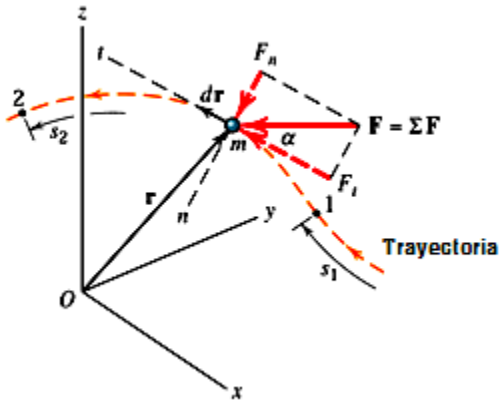


Figura 5.10

En dicho instante, la partícula tiene una velocidad $\vec{v}$, tangente a la trayectoria y se encuentra sometida a un sistema de fuerzas externas representado por la fuerza resultante $\vec{F} = \sum \vec{F}_i$. Si todas las fuerzas o la fuerza resultante se descomponen en componentes normal *n* y tangencial *t*, la fuerza resultante en dirección normal no realizan trabajo debido a que es perpendicular al desplazamiento $d\vec{r}$. Por el contrario, la resultante de las fuerzas en la dirección tangencial si efectúa trabajo por ser paralela al desplazamiento $d\vec{r}$.

Al aplicar la segunda ley de Newton en dirección tangencial se tiene

$$\sum F_t = ma_t$$

$$\sum F\cos\theta = m\frac{dv}{dt} = mv\frac{dv}{ds} \tag{5.16}$$

Separando variables en la ecuación anterior e integrando desde la posición $s = s_1$ cuando $v = v_1$ hasta la posición $s = s_2$ cuando $v = v_2$, se tiene

$$(\sum F\cos\theta)ds = mv\,dv$$

$$\int_{s_1}^{s_2}\sum F\cos\theta\,ds = m\int_{v_1}^{v_2} v\,dv$$

$$\sum U_{1\to 2} = \tfrac{1}{2}mv_2^2 - \tfrac{1}{2}mv_1^2 \tag{5.17}$$

La ecuación (5.17) se le conoce como *principio trabajo energía cinética* para una partícula. El término de la izquierda representa el trabajo total hecho por todas las fuerzas, mientras que los de la derecha representan la *energía cinética final e inicial* de la partícula. Es decir, la energía cinética está dada por la ecuación

$$T = \frac{1}{2}mv^2 \tag{5.18}$$

La energía cinética es una magnitud escalar que siempre es positiva, es decir, no depende de la dirección de la velocidad y tiene las mismas unidades del trabajo, esto es el Joule (J). En términos de la energía cinética el principio trabajo energía cinética , puede escribirse en la forma

$$\sum U_{1\to 2} = T_2 - T_1 \tag{5.20}$$

Esta ecuación expresa que cuando una partícula se mueve desde la posición **1** a la posición **2** bajo la acción de una fuerza resultante $\vec{F} = \sum \vec{F}$, el trabajo es igual a la variación de la energía cinética. A esta expresión también se le llama ***teorema de las fuerzas vivas***.

$$T_1 + U_{1\to 2} = T_2 \Rightarrow \frac{1}{2}mv_1^2 + U_{1\to 2} = \frac{1}{2}mv_2^2 \tag{5.21}$$

Es decir la energía cinética en la posición final se obtiene sumando la energía cinética en la posición inicial más el trabajo realizado por la fuerza resultante. La energía cinética representa ***la capacidad de realizar trabajo asociada a la velocidad de la partícula.***

IV. POTENCIA Y EFECIENCA.

4.1. Potencia.

La capacidad de una máquina se mide por la cantidad de trabajo que realiza o la cantidad de energía que entrega por unidad de tiempo. El trabajo total o la energía producida no constituyen una medida de tal capacidad, puesto que un motor, por muy pequeño que sea, puede entregar una gran cantidad de energía si se le da un suficiente tiempo. Por otro lado, se requieren máquinas grandes y muy potentes para realizar cantidades de trabajo en intervalos de tiempo pequeños. Es decir, la capacidad de una máquina se clasifica de a cuero con su *Potencia Mecánica*, que se define como *la cantidad de trabajo efectuada por unidad de tiempo.*

De acuerdo con esta definición, la ***Potencia media*** (P_m) de una máquina o motor que efectúa una cantidad de trabajo ΔU en in intervalo de tiempo Δt, viene expresada como

$$P_m = \frac{\Delta U}{\Delta t} \tag{5.22}$$

Si el intervalo de tiempo Δt, es cada vez más pequeño ($\Delta t \to 0$), se obtiene la ***Potencia instantánea*** **(P)**, expresada por la ecuación

$$P = \lim_{\Delta t\to 0}\left(\frac{\Delta U}{\Delta t}\right) = \frac{dU}{dt} \tag{5.23}$$

Teniendo en cuenta que el trabajo es definido como $dU = \vec{F}.\ d\vec{r}$ la potencia instantánea puede expresarse como

$$P = \frac{dU}{dt} = \frac{\vec{F}.\ d\vec{r}}{dt} = \vec{F}.\frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$P = \vec{F}.\ \vec{v} \tag{5.24}$$

La potencia mecánica es, evidentemente, una magnitud escalar y su unidad en el sistema internacional de unidades es *N.m/s = J/s*, unidad denominada *watt* (W) y es el joule por segundo. Sin embargo, existen otras unidades en muy usadas en países de habla inglesa como el *cavallo de vapor* (**hp**) expresado como (*1 hP = 550 .pie/s*). Las equivalencia entre watt y hp es ***1hp = 746 W***

4.2. Rendimiento mecánica.

Cuando un sistema mecánico se encuentra funcionando, pierden gran cantidad de energía debido al rozamiento que existe entre sus piezas móviles cuando la máquina se encuentra funcionando. Por tanto, la energía que una máquina entrega al exterior (*energía útil*) es siempre inferior a la energía que se entrega a la máquina (*energía consumida*). Definimos el *rendimiento mecánico* (η) *como el cociente del trabajo (energía) de salida entre el trabajo (energía) de entrada*. Esto es

$$\eta = \frac{Trabajo\ de\ salida}{trabajo\ de\ entrada} = \frac{Energía\ de\ salida}{Energía\ de\ entrada} \tag{5.25}$$

Dividiendo el numerador y el denominador entre el tiempo, el rendimiento mecánico puede expresarse en función de las potencias mecánicas de entrada y salida en la forma

$$\eta = \frac{Potencia\ de\ salida}{Potencia\ de\ entrada} \tag{5.26}$$

Debido a que todos los sistemas mecánicos pierden energía debido al rozamiento, esta energía se disipa en forma de calor hacia el medio ambiente, entonces $P_{salida} < P_{entrada}$. Por lo tanto, el rendimiento mecánico siempre es menor que la unidad. Así mismo, como todas las máquinas fabricadas desarrollan cierta cantidad de trabajo aún cuando éste sea pequeño, entonces poseerán un rendimiento mecánico mayor que cero. Bajo estas circunstancias el rendimiento puede expresarse como

$$0 < \eta < 1 \tag{5.27}$$

V. ENERGIA POTENCIAL

5.1. Energía potencial gravitacional (g constante)

Consideremos una partícula de masa m en las proximidades de la superficie terrestre, en donde la interacción gravitacional (peso del cuerpo ***W = mg***) es prácticamente constante como se muestra en la figura 5.11.

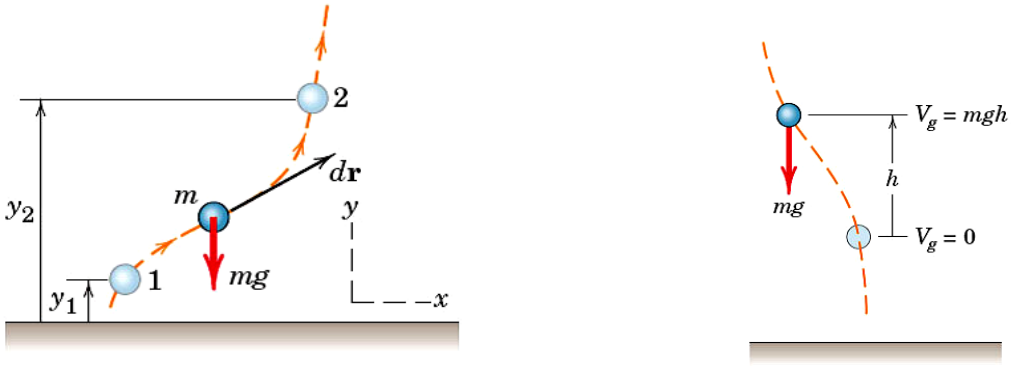


Figura 5.11

En este caso, el trabajo desarrollado por el peso ***mg*** cuando la partícula se desplaza a lo largo de una trayectoria curva arbitrario puede expresarse como

$$U_{1\to 2} = -mg(y_2 - y_1) = mg\ y_1 - mg\ y_2 \tag{5.28}$$

Esta ecuación indica que el trabajo es independiente de la trayectoria seguida y sólo depende del peso y del desplazamiento vertical. Es decir, el trabajo desarrollado por el peso se obtiene restando el valor de la función *mgy* correspondiente a la segunda posición del cuerpo de su valor correspondiente a la primera posición. A la función ***mgy*** que se le denomina *energía potencial gravitacional* del cuerpo respecto a la fuerza de gravedad *W = mg*. Es decir,

$$V_g = W\,y = mg\;\; y = mgh \tag{5.29}$$

El trabajo de la fuerza gravitacional (peso) puede expresarse como

$$U_{1\to 2} = V_{g\ 1} - V_{g\ 2} \tag{5,29}$$

Esta ecuación expresa que si la energía potencial aumenta durante el desplazamiento $V_{g,2} > V_{g,1}$, el trabajo desarrollado por el peso disminuye. Sin embargo, si la energía potencial disminuye $V_{g,1} > V_{g,2}$, el trabajo desarrollado por el peso es positivo. Así pues, el trabajo efectuado por la fuerza gravitacional es igual y opuesto a la variación de la energía potencial.

Como en la ecuación (5.29), interviene la variación de energía potencial y no el verdadero valor de V_g. A esta ecuación puede añadirse una constante C sin que el trabajo de la fuerza sea afectado. Es decir

$$U_{1\to 2} = \left[V_{g,1} + C\right] - \left[V_{g,2} + C\right] \tag{5.30}$$

Es decir, para medir la energía potencial puede escogerse arbitrariamente un nivel de referencia (nivel en el cual la energía potencial es nula) y a partir de donde se mide la altura.

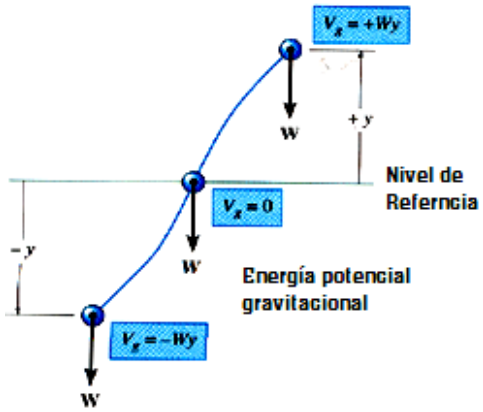


Figura 5.12

5.2. Energía potencial gravitacional (fuerza inversamente proporcional al cuadrado de la distancia)

Al considerar grandes variaciones en la altitud en el campo gravitatorio terrestre como se muestra en la figura 5.13, la fuerza gravitacional $\vec{F}_g = -G\frac{mM}{r^2}\hat{e}_r = -\frac{mgR}{r^2}\hat{e}_r$ ya no puede considerarse constante. El trabajo efectuado contra esta fuerza para cambiar de posición será

$$W_{A\to B} = \int_{r_A}^{r_B} \vec{F}_g.d\vec{s} = \int_{r_A}^{r_B} \left(-G\frac{Mm}{r^2}\hat{e}_r\right).(dr\hat{e}_r + rd\varphi\hat{e}_\varphi)$$

$$W_{A\to B} = -GMm\int_{r_A}^{r_B}\frac{dr}{r^2} = GMm\left(\frac{1}{r}\right)\Big|_{r_A}^{r_B} = \left(-\frac{GmM}{r_A}\right) - \left(-\frac{GmM}{r_B}\right) \tag{5.31}$$

Por tanto, el trabajo se puede obtener restando el valor de la función (***-GmR/r***), correspondiente a la segunda posición de su valor correspondiente a la primera. Es decir, la energía potencial gravitacional para una fuerza gravitacional que depende del inverso al cuadrado, está dado por la ecuación

$$V_g = -\frac{GMm}{r} = -\frac{mgR^2}{r} \tag{5.32}$$

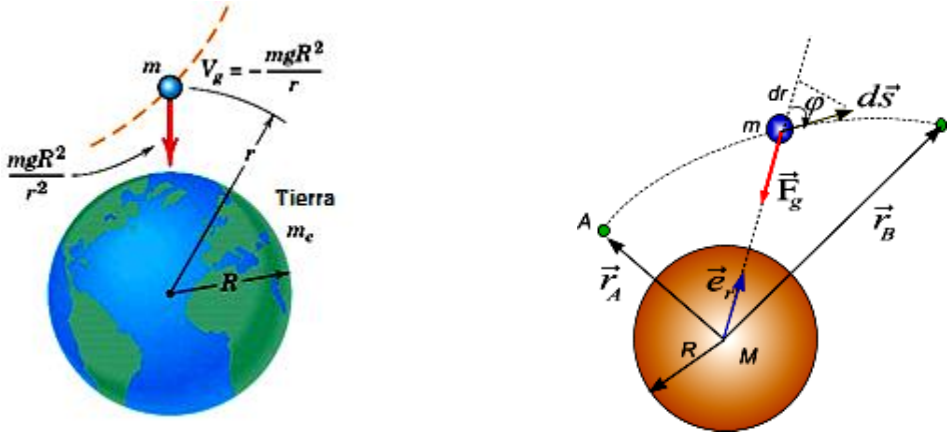


Figura 5.13.

5.3. Energía potencial elástica

Consideremos ahora una partícula de masa *m* unida a un resorte lineal actuando a tensión o compresión, como se muestra en la figura 5.14. La fuerza que el resorte ejerce sobre la partícula es $\vec{F}_e = \mp(kx\,\hat{\imath}\,)$, donde *x* es la deformación que experimenta el resorte.

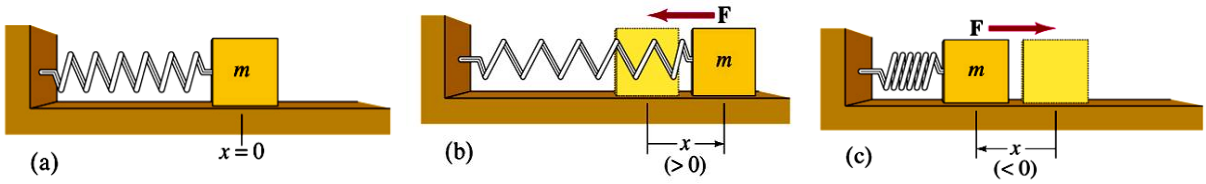


Figura 5.14

El trabajo realizado por la fuerza elástica viene expresado por la ecuación

$$U_{1\to 2} = -\int_{x_1}^{x_2}(kx)dx = \frac{1}{2}kx_1^{\,2} - \frac{1}{2}kx_2^{\,2} \tag{5.33}$$

Esta ecuación indica que el trabajo es independiente de la trayectoria seguida y se obtiene restando el valor de la función $kx^2/2$ correspondiente a la segunda posición del valor correspondiente a la primera posición. Po tanto, la energía potencial elástica viene expresada por

$$V_e = \frac{1}{2}k\,x^2 \tag{5.34}$$

5.4. Función energía potencial

Si una partícula de masa *m* se encuentra sometida a una fuerza gravitacional ($W = mg$) y a una fuerza elástica ($F_e = k\,x$), la función energía potencial puede expresarse como

$$V = V_g + V_e = mgh + \frac{1}{2}k\,x^2 \tag{5.35}$$

5.5. Energía mecánica

Si una partícula de masa *m* se está moviendo con una determinada velocidad *v* bajo la acción de fuerzas ele´sticas y gravitacionales y fuerzas que no desarrollan trabajo, entonces la energía mecánica se define como la suma de las energía cinética más potencial. Es decir,

$$E_M = T + V = \frac{1}{2}m\,v^2 + m\,g\,h + \frac{1}{2}k\,x^2 \tag{5.36}$$

VI. FUERZAS CONSSERVATIVAS

En la sección anterior al evaluar el trabajo de una fuerza gravitacional o el trabajo de una fuerza elástica, se demostró que dicho trabajo es independiente de la trayectoria seguida. Las fuerzas de dichas características están asociadas a *campos de fuerzas conservativos* las que poseen una propiedad matemática de gran importancia.

Para encontrar una relación entre la fuerza y la función potencial consideremos una partícula de masa *m* que se mueve de la posición A_1 hasta la posición A_2 a lo largo de la trayectoria curva C y bajo la acción de la fuerza F como se muestra en la figura 5.15.

Figura 5.15.

Si ésta fuerza desarrolla un trabajo que es independiente de la trayectoria seguida, dicho trabajo puede expresarse como

$$U_{1\to 2} = V\ (x_1, y_1, z_1) - V\ (x_2, y_2, z_2) \tag{5.36}$$

Si la partícula se mueve a lo largo de la trayectoria cerrada por acción de la fuerza F, como se muestra en la figura 5.15b, esto es el punto A_1 coincide con el punto A_2. El trabajo será nulo o cero, es decir

$$\oint_C \vec{F}.\ d\vec{r} = 0 \tag{5.36}$$

Por tanto decimos que ***una fuerza es conservativa si su trabajo desarrollado es independiente de la trayectoria seguida o si el trabajo a lo largo de una trayectoria cerrada es nulo o cero.***

Cuando el desplazamiento sobre la trayectoria es infinitesimal, es decir, el desplazamiento es desde el punto A (x, y, z) hasta el punto de coordenadas A' (*x + dx; y + dy; z + dz*). El trabajo desarrollado por la fuerza F será

$$\begin{aligned} dU &= V\ \ x,y,z\ \ - V\ \ x+dx, y+dy, z+dz \\ dU &= -dV(x,y,z) \end{aligned} \tag{5.37}$$

Es decir, el trabajo de una fuerza conservativa es una diferencial exacta.

Expresando la fuerza $\vec{F}$ y el desplazamiento $d\vec{r}$ en coordenadas rectangulares (*x, y, z),* el trabajo puede expresarse como

$$dU = \vec{F}.\ d\vec{r} = (F_x\hat{i} + F_y\hat{j} + F_z\hat{k}).(dx\hat{i} + dy\hat{j} + dz\hat{k}) = F_x dx + F_y dy + F_z dz \tag{5.38}$$

Debido a que la energía potencial es función de tres variables de posición V (x, y, z), su diferencial se expresa en la forma

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial y}dy + \frac{\partial V}{\partial z}dz \tag{5.39}$$

Remplazando las ecuaciones (5,38) y (5.39), en la ecuación (5.37), resulta

$$F_x dx + F_y dy + F_z dz = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial y}dy + \frac{\partial V}{\partial z}dz\right) \tag{5.39}$$

O sea

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x} + F_x\right)dx + \left(\frac{\partial V}{\partial y} + F_y\right)dy + \left(\frac{\partial V}{\partial z} + F_z\right)dz = 0 \tag{5.40}$$

Si el trabajo es efectivamente independiente de la trayectoria seguida, la ecuación (5.40) debe satisfacerse para cualquier elección de *dx, dy* o *dz*. Por tanto tenemos

$$F_x = -\frac{\partial V}{\partial x},\ \ F_y = -\frac{\partial V}{\partial y},\ \ F_z = -\frac{\partial V}{\partial z} \tag{5.41}$$

Es decir, las componentes de una fuerza conservativa se obtienen derivando la función energía potencial. Una notación vectorial para la ecuación (5.41) sería

$$\begin{aligned} \vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k} &= -\left(\frac{\partial V}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial V}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial V}{\partial z}\vec{k}\right) \\ \vec{F} &= -\nabla V \end{aligned} \tag{5.42}$$

Donde ∇ es el operador vectorial, llamado *operador nabla*.

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k} \tag{5.43}$$

Si el movimiento plano y se usan las coordenadas radial r y transversal θ, el desplazamiento a lo largo del radio vector $\vec{r}$ es dr y el desplazamiento transversal es $rd\theta$, como se muestra en la figura. Entonces, las componentes radial y transversal pueden determinarse mediante las ecuaciones

$$F_r = -\frac{\partial V}{\partial r}$$
$$F_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta} \qquad (5.44)$$

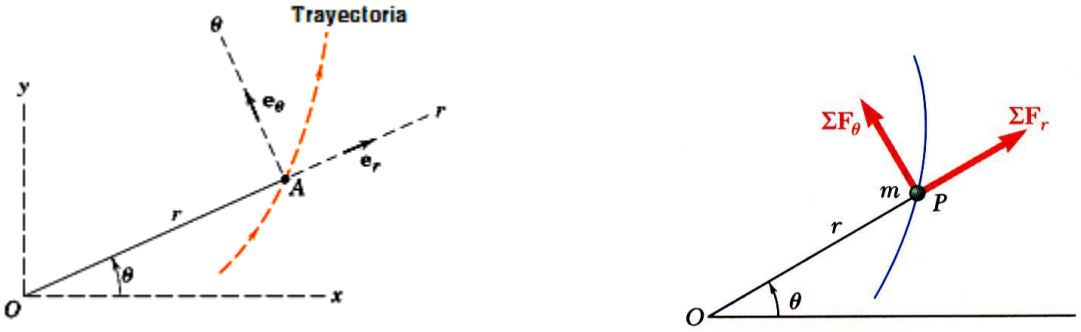


Figura 5.16

VII. CONSERVACIÓN DE LA ENERGÍA MECÁNICA

Cuando una partícula se encuentra sometida a la acción de un sistema de fuerzas conservativas como se muestra en la figura5.17. La energía mecánica permanece constante

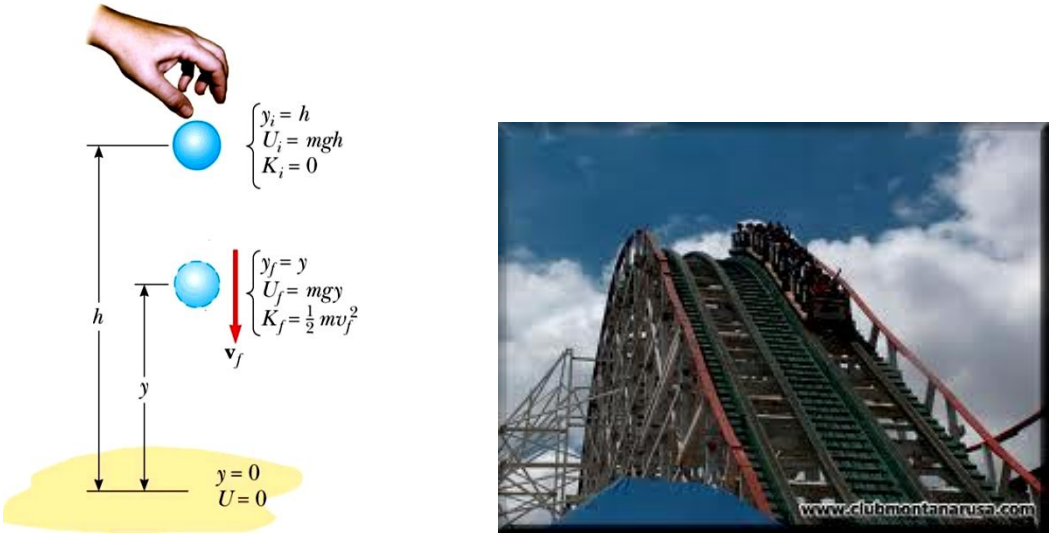


Figura 5.17

Es decir, el principio trabajo-energía cinética puede escibirse en la forma

$$T_1 + \sum U_{1\to 2} = T_2$$
$$T_1 + V_1 - V_2 = T_2$$

$$T_1 + V_1 = T_2 + V_2 \tag{5.45}$$

La ecuación (3.45) se le llama principio de conservación de la energía mecánica y establece que ***si las fuerzas que actúan sobre una partícula son conservativas, la energía total E de la partícula permanece constante o se conserva.*** Es decir

$$E = T + V = cons\tan te \tag{5.46}$$

Si sobre la partícula actúan fuerzas gravitacionales (*mg*) y fuerzas elástica ($F_e = k\,x$) y fuerzas que no desarrollan trabajo, la ecuación de conservación de la energía se escribe en la forma

$$T_1 + V_{g,1} + V_{e,1} = T_2 + V_{g,2} + V_{e,2}$$

O en función de incremento de energía se puede escribir

$$\begin{gathered}(T_2 - T_1) + (V_{g,2} - V_{g,1}) + (V_{e,2} - V_{e,1}) = 0 \\ \Delta T + \Delta V_g + \Delta V_e = 0\end{gathered} \tag{5.47}$$

VIII. FUERZAS NO CONSERVATIVAS

Si sobre una partícula actúan fuerzas conservativas como el peso (mg) y fuerzas elásticas (kx); fuerzas que no desarrollan trabajo como la fuerza normal (N) y fuerzas no conservativas como el rozamiento u otras fuerzas como, véase la figura 5.18. En este caso la energía mecánica no permanece constante o no se conserva, ello se debe a que por ejemplo la fricción es una fuerza disipativa, es decir durante el movimiento la energía producto del rozamiento se disipa hacia el medio ambiente.

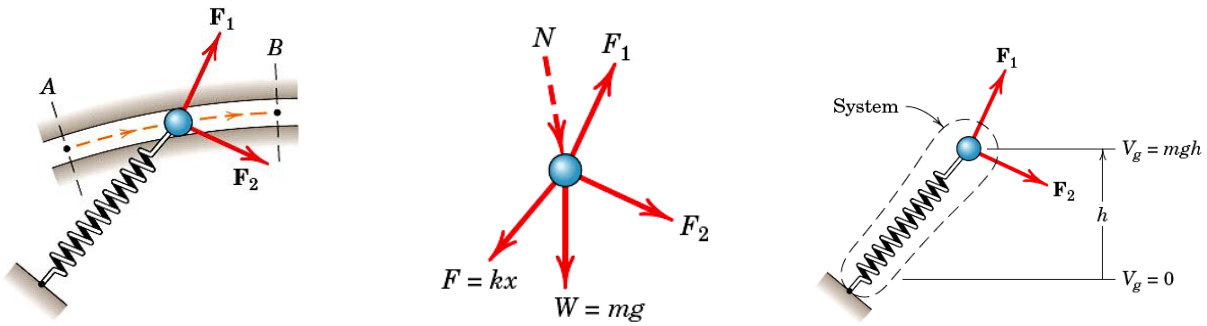


Figura 5.18.

El principio trabajo energía cinética puede expresarse en la forma

$$U_{1\to 2} = T_2 - T_1$$

$$\int_1^2 (\vec{F}_{nc} + \vec{F}_c).d\vec{r} = T_2 - T_1$$

$$\int_1^2 \vec{F}_{nc}.d\vec{r} + \int_1^2 \vec{F}_c.d\vec{r} = T_2 - T_1$$

Pero el trabajo de las fuerzas conservativas puede expresarse en función de una variación de energía potencial, con lo que la ecuación anterior se escribe

$$\int_1^2 \vec{F}_{nc}.d\vec{r} + V_1 - V_2 = T_2 - T_1 \tag{5.48}$$

Reordenando la ecuación anterior resulta

$$U'_{nc} = T_2 + V_2 - T_1 + V_1 \tag{5.49}$$

En el caso de que las fuerzas conservativas sean el peso y la fuerza elástica, la ecuación (5.49) se escribe en la forma

$$\Delta T + \Delta V_g + \Delta V_e = U'_{nc} \tag{5.50}*$$

Donde

$$\Delta T = \frac{1}{2} m \left(v_2^2 - v_1^2 \right)$$

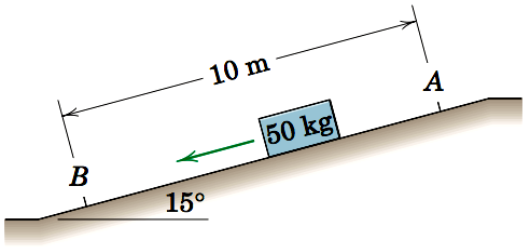
$$\Delta V_g = mg \left(h_2 - h_1 \right)$$

$$\Delta V_e = \frac{1}{2} k \left(x_2^2 - x_1^2 \right)$$

$$U'_{nc} = \textit{trabajo no conservativo}$$

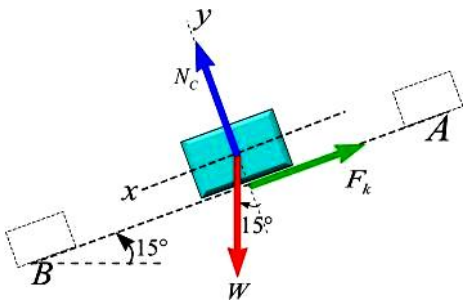
IX. PROBLEMAS RESUELTOS

1. A la caja de *50 kg* mostrada en la figura se le una velocidad de *4 m/s* hacia abajo del plano inclinada cuando está en la posición A. si el coeficiente de fricción entre el bloque y el plano inclinado es 0,30. Determine la velocidad de la caja cuando ésta alcance la posición más baja B sobre el plano inclinado.



Solución

En la figura se muestra el DCL de la caja, sobre ella actúan: la fuerza de rozamiento (F_k), el peso W = mg y la reacción normal (N_C).



La fuerza de rozamiento se determina aplicando la segunda ley de Newton en dirección *y*.

$$\sum F_y = ma_y \Rightarrow N_C - mg\cos 15° = m(0)$$
$$N_C = 50(9,8)\cos 15° = 173,3N$$
$$F_k = \mu_k N_C = 0,3(473,3N)$$
$$F_k = 142N$$

Las energías cinéticas en A y B son

$$T_A = \frac{1}{2}mv_A^2 = \frac{1}{2}(50kg)(4m/s)^2 = 400J$$

$$T_B = \frac{1}{2}mv_B^2 = \frac{1}{2}(50kg)v^2 = 25\ v^2$$

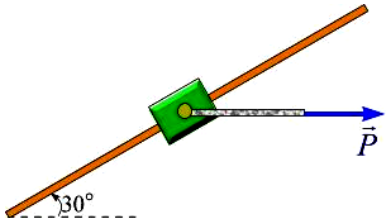
Las fuerzas que realizan trabajo son el peso y la fuerza de rozamiento. Por tanto, el trabajo neto será

$$U_{A\to B} = (mgsen15° - F_k)s_{AB}$$
$$= [50(9,8)sen15° - 142)](10m)$$
$$U_{A\to B} = -151,78N$$

Aplicando el teorema trabajo-energía cinética se tiene

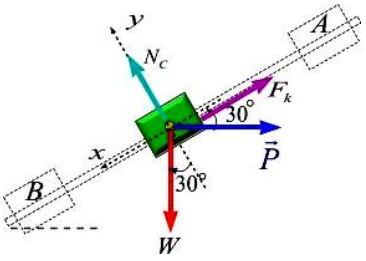
$$T_A + U_{A\to B} = T_B$$
$$400J - 151,78J = 25\ v^2$$
$$v = 3,15\ m/s$$

2. Un collar de 2 kg de masa está moviéndose hacia abajo con una velocidad de 3 m/s cuando una fuerza $\vec{P}$ se aplica al cable horizontal. Suponiendo que el coeficiente de rozamiento cinético entre el collar y la varilla es μ_k = *0,20*. Determine la magnitud de la fuerza $\vec{P}$ si el collar se detiene después de recorrer una distancia d = 1,2 m más abajo del punto en donde se aplico la fuerza $\vec{P}$.



Solución

En la figura se muestra el DCL de la caja, sobre ella actúan: la fuerza de rozamiento (F_k), el peso W = mg, la reacción normal (N_C) y la fuerza exterior P



La fuerza de rozamiento se determina aplicando la segunda ley de Newton en dirección *y*.

$$\sum F_y = ma_y \Rightarrow N_C - mg\cos 30° - Psen30° = m(0)$$
$$N_C = 2(9,8)\cos 30° + P(1/2)$$
$$N_C = 16,97 + 0,5P$$

$$F_k = \mu_k N_C = 0,2(16,97 + 0,5P)$$
$$F_k = 3,39 + 0,1P$$

Las energías cinéticas en A y B son

$$T_A = \frac{1}{2}mv_A^2 = \frac{1}{2}(2kg)(3m/s)^2 = 9J$$

$$T_B = \frac{1}{2}mv_B^2 = \frac{1}{2}(2kg)(0)^2 = 0$$

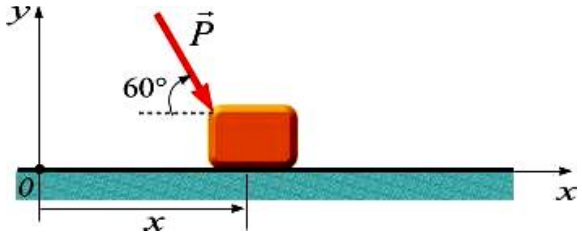
Las fuerzas que realizan trabajo son el peso y la fuerza de rozamiento. Por tanto, el trabajo neto será

$$U_{A\to B} = (mgsen30° - F_k - P\cos 30°)s_{AB}$$
$$= [2(9,8)sen30° - 3,39 - 0,1P - 0,866P)](1,2m)$$
$$U_{A\to B} = 7,692 - 1,159P$$

Aplicando el teorema trabajo-energía cinética se tiene

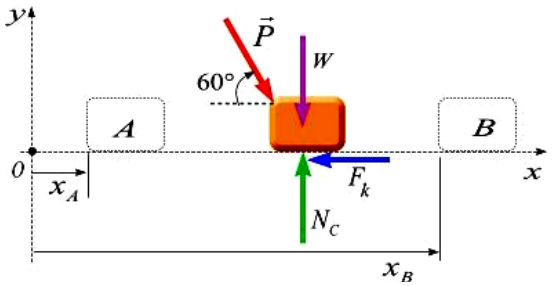
$$T_A + U_{A\to B} = T_B$$
$$9 + 7,692 - 1,159P = 0$$
$$P = 15,54\ N$$

3. La dirección de la fuerza P que actúa sobre el bloque de *20 kg*, mostrado en la figura es constante pero su magnitud varía de acuerdo con la ecuación $P = 300\ x^2\ N$, donde *x* especifica la posición del bloque en metros. Cuando *x = 0,6 m*, la velocidad es *1,2 m/s* hacia la derecha. Suponiendo que el coeficiente de fricción entre el bloque y el plano horizontal es $\mu_k = 0,10$. Determine la velocidad del bloque cuando *x = 1,5 m*.



Solución

En la figura se muestra el DCL de la caja, sobre ella actúan: el peso ($W = mg$); la reacción normal (N_C); la fuerza de rozamiento (F_k) y la fuerza variable P.



Del DCL del bloque se observa que sobre él actúan dos fuerzas conservativas (el peso), la reacción normal que no realiza trabajo y la fricción que es una fuerza no conservativa. Por tanto se usará el principio trabajo-energía cinética.

La fuerza de rozamiento se determina aplicando la segunda ley de Newton en dirección *y*.

$$\sum F_y = ma_y \Rightarrow N_C - mg - Psen60° = m(0)$$
$$N_C = 20(9,8) + 0,866P$$
$$= 196 + 0,866[300\ x^2]$$
$$N_C = (196 + 259,8\ x^2)N$$

$$F_k = \mu_k N_C = 0,1(196 + 259,8\ x^2)$$
$$F_k = (19,6 + 25,98\ x^2)N$$

Las energías cinéticas en A y B son

$$T_A = \frac{1}{2}mv_A^2 = \frac{1}{2}(20kg)(1,2m/s)^2 = 14,4J$$

$$T_B = \frac{1}{2}mv_B^2 = \frac{1}{2}(20kg)v^2 = 10\ v^2$$

Del diagrama de cuerpo libre se observa que las fuerzas que realizan trabajo son la fuerza de rozamiento F_k y la componente horizontal de la fuerza P. Por tanto, se tiene

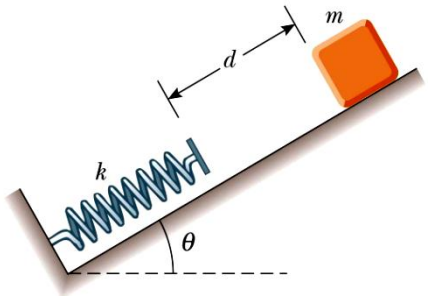
$$U_{A\to B} = \int_A^B [P\cos 60°\hat{i} - F_k\hat{i}].(dx\ \hat{i})$$
$$U_{A\to B} = \int_{x_A}^{x_B} [150\ x^2 - (19,6 + 25,98\ x^2)]dx$$
$$U_{A\to B} = \int_{0,6}^{1,5} [124,02\ x^2 - 19,6)]dx$$
$$U_{A\to B} = [\frac{124,03}{3}x^3 - 19,6x]_{0,6}^{1,5}$$

$$U_{A\to B} = 41,34(1,5)^3 - 19,6(1,5) - 41,34(0,6)^3 + 19,6(0,6)$$
$$U_{A\to B} = 112,93\ J$$

Aplicando el principio-trabajo energía cinética

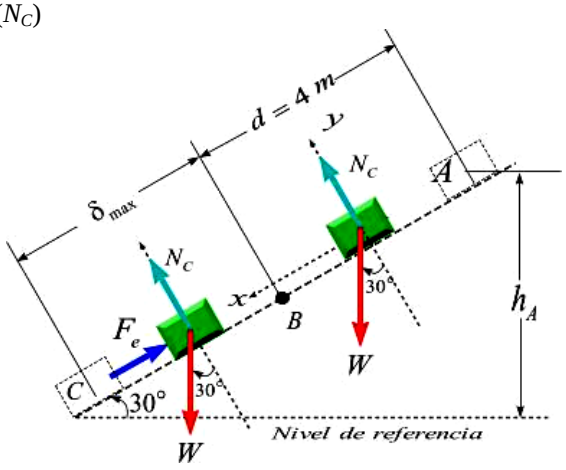
$$T_A + U_{A\to B} = T_B$$
$$14,4 + 112,93 = 10v_B^2$$
$$v_B = 3,57\ m/s$$

4. Un bloque de *2 kg* de masa se deja libre sobre un plano inclinado hacia abajo liso a una distancia *d = 4 m* de un muelle de constante *k = 100 N/m*. El muelle está fijo a lo largo del plano inclinado *30°* con la horizontal. (a) Determine la compresión máxima del muelle admitiendo y (b) Si el plano inclinado es rugoso (μ_k = *0,20*) ¿Cuál sería la compresión máxima del muelle bajo estas condiciones?.



Solución

Parte a. En la figura se muestra el DCL de la caja, sobre ella actúan: la fuerza elástica (F_e) que actúa solo de B a C, el peso *W = mg* y la reacción normal (N_C)



Del DCL del bloque se observa que sobre él actúan dos fuerzas conservativas (el peso y la fuerza elástica) y la reacción normal que no realiza trabajo. Por tanto se usará el principio de conservación de la energía para resolver. El cuerpo parte del reposo en A (v_A = *0*) y después de que se alcanza la máxima deformación el bloque alcanza momentáneamente el reposo (v_C = *0*), entonces la variación de energía cinética será

$$\Delta T = \frac{1}{2}m(v_C^2 - v_A^2) = \frac{1}{2}(2kg)(0-0)$$
$$\Delta T = 0$$

Usando el nivel de referencia mostrado en la figura. La variación de energía potencial gravitacional es

$$\Delta V_g = mg(h_C - h_A)$$
$$= 2kg(9,8m/s^2)[0 - (d + \delta_{\max})sen30°]$$
$$= -9,8(4 + \delta_{\max})$$
$$\Delta V_g = -39,2 - 9,8\delta_{\max}$$

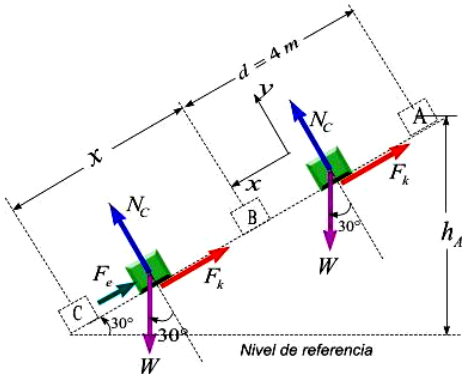
La variación de energía potencial elástica será

$$\Delta V_e = \frac{1}{2}k[x_C^2 - x_A^2] = \frac{1}{2}(100N/m)[\delta_{\max}^2 - 0]$$
$$\Delta V_e = 50\delta_{\max}^2$$

Aplicando el principio de conservación de la energía mecánica, se tiene

$$\Delta T + \Delta V_g + \Delta V_e = 0$$
$$0 + [-39,2 - 9,8\delta_{\max}] + 50\delta_{\max}^2 = 0$$
$$50\delta_{\max}^2 - 9,8\delta_{\max} - 39,2 = 0$$
$$\delta_{\max} = 989mm \quad \text{Rta}$$

Parte b. En la figura se muestra el DCL de la caja, sobre ella actúan: la fuerza elástica (F_e) que actúa solo de B a C, el peso *W = mg*, la reacción normal (N_C) y la fuerza de rozamiento que actúan desde A hasta C.



Del DCL del bloque se observa que sobre él actúan dos fuerzas conservativas (el peso y la fuerza elástica); la reacción normal que no realiza trabajo y la fuerza de rozamiento que es una fuerza no conservativa. Por tanto se usará el principio trabajo-energía mecánica.

El cuerpo parte del reposo en A ($v_A = 0$) y después de que se alcanza la máxima deformación el bloque alcanza momentáneamente el reposo ($v_C = 0$), entonces la variación de energía cinética será

$$\Delta T = \frac{1}{2}m(v_C^2 - v_A^2) = \frac{1}{2}(2kg)(0-0)$$
$$\Delta T = 0$$

Usando el nivel de referencia mostrado en la figura. La variación de energía potencial gravitacional es

$$\Delta V_g = mg(h_C - h_A)$$
$$= 2kg(9,8m/s^2)[0-(d+x)sen30°]$$
$$= -9,8(4+x)$$
$$\Delta V_g = -39,2 - 9,8\ x$$

La variación de energía potencial elástica será

$$\Delta V_e = \frac{1}{2}k[x_C^2 - x_A^2] = \frac{1}{2}(100N/m)[x^2 - 0]$$
$$\Delta V_e = 50x^2$$

Para determinar el trabajo no conservativo se necesita la fuerza de rozamiento. Para esto se aplica la segunda ley de Newton en la dirección *y*. Esto es,

$$\sum F_y = ma_y \Rightarrow N_C - mg\cos 30° = m(0)$$
$$N_C = 2(9,8)\cos 30°$$
$$N_C = 16,974N$$
$$F_k = \mu_k N_C = 0,2(16,974N)$$
$$F_k = 3,394$$

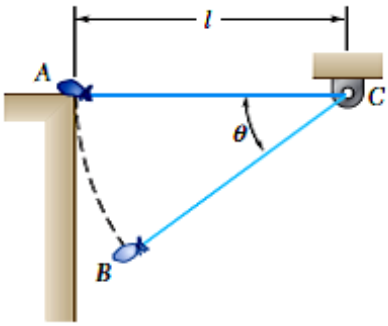
El trabajo no conservativo es el desarrollado por la fuerza de rozamiento

$$U'_{A\to C} = -F_k(d+x) = -3,394N(4m+x)$$
$$U'_{A\to C} = -13,576 - 3,394\ x$$

Al aplicar el teorema del trabajo- energía mecánica se tiene

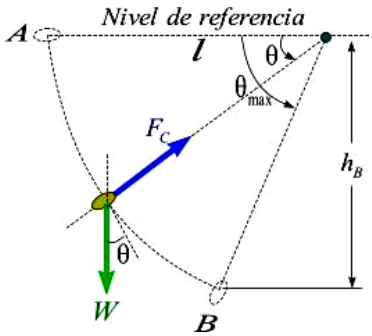
$$\Delta T + \Delta V_g + \Delta V_e = U'_{A\to C}$$
$$0 + [-39,2 - 9,8\ x] + 50x^2 = -13,576 - 3,394\ x$$
$$50\ x^2 - 6,41\ x - 25,624 = 0$$
$$x = 783\ mm \quad \text{Rta}$$

5. Una bolsa se empuja suavemente desde lo alto de una pared en A y oscila en un plano vertical en el extremo de una cuerda de longitud *l*. Determine el ángulo θ para el cual la cuerda se romperá, sabiendo que puede soportar una tensión máxima 50% mayor que el peso de la bolsa.



Solución

En la figura se muestra el DCL de la bolsa para cualquier ángulo θ. Las fueras que actúan sobre la bolsa son su peso propio (W = mg) fuerza que es conservativa y la tensión en la cuerda (F_C), la cual no desarrolla trabajo por ser perpendicular al desplazamiento de la bolsa. Por lo tanto, la energía mecánica se conserva.



La bolsa inicia su movimiento en A con una velocidad nula ($v_A = 0$) y al pasar por el punto B en donde se rompe la cuerda su velocidad será ($v_B = v$). Entonces la variación de energía cinética será

$$\Delta T = \frac{1}{2}m(v_B^2 - v_A^2) = \frac{1}{2}m(v^2 - 0)$$

$$\Delta T = \frac{1}{2}m\,v^2$$

Usando el nivel de referencia mostrado en la figura. La variación de energía potencial gravitacional es

$$\Delta V_g = mg(h_B - h_A)$$
$$= mg[-l\ sen\theta - 0]$$
$$\Delta V_g = -m\ g\ l\ sen\theta$$

Aplicando el principio de conservación de la energía mecánica

$$\Delta T + \Delta V_g = 0$$

$$\frac{1}{2}m\,v^2 - m\ g\ l\ sen\theta = 0$$

$$v^2 = 2g\ l\ sen\theta$$

Para determinar el ángulo $\theta = \theta_{max}$ para el cual la cuerda se rompe, se aplica la segunda ley de newto en la dirección normal o centrípeta

$$\sum F_n = ma_n$$

$$F_C - mgsen\theta = m[\frac{v_B^2}{l}]$$

Como la cuerda solo puede resistir una tensión máxima de *1,5 mg*, la ecuación anterior se escribe en la forma

$$1{,}5mg - mgsen\theta_{max} = \frac{m}{l}v_B^2$$

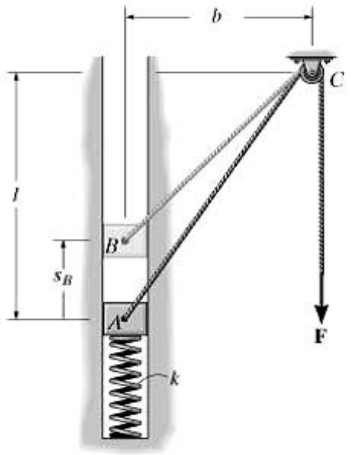
Remplazando el valor de la velocidad obtenida previamente, se tiene

$$1{,}5\ m\ g - m\ g\ sen\theta_{max} = \frac{m}{l}(2\ g\ l\ sen\theta_{max})$$

$$sen\theta_{max} = 0{,}5$$

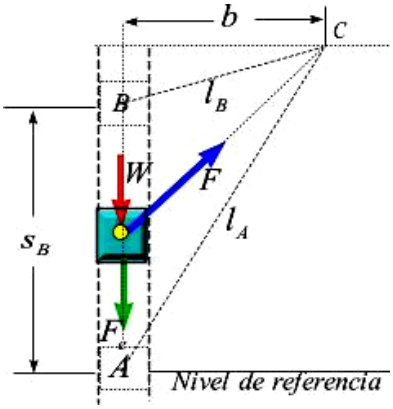
$$\theta_{max} = 30°$$

6. El bloque mostrado tiene una masa de *8 kg* y se mueve dentro de una ranura vertical lisa. Si parte del reposo cuando el resorte unido al bloque tiene su longitud libre en. Determine la fuerza vertical constante F que debe aplicarse a la cuerda para que el bloque alcance una rapidez de v_B = *3 m/s* cuando llegue a B. Considere que *b = 0,3 m*; *l = 0,4 m*; S_B *= 0,15 m* y *k = 400 N/m*.



Solución

En la figura se muestra el DCL del bloque para cualquier desplazamiento vertical. Las fueras que actúan sobre el bloque son su peso propio (W = mg) fuerza que es conservativa y la tensión en la cuerda (F), la cual e de módulo constante pero de dirección variable. Por lo tanto, la energía mecánica no se conserva.



Del DCL del bloque se observa que sobre él actúan dos fuerzas conservativas (el peso y la fuerza elástica); la reacción normal que no realiza trabajo y la fuerza externa F aplicada al cable que es no conservativa. Por tanto se usará el principio trabajo-energía mecánica.

$$\Delta T + \Delta V_g + \Delta V_e = U'_{A\to B} \qquad (1)$$

La bloque inicia su movimiento en A con una velocidad nula (v_A = *0*) y al pasar por el punto B su

velocidad será (v_B = *3m/s*). Entonces la variación de energía cinética será

$$\Delta T = \frac{1}{2}m(v_B^2 - v_A^2) = \frac{1}{2}(8kg)[(3m/s)^2 - 0)$$

$$\Delta T = +36\ J \qquad (2)$$

Usando el nivel de referencia mostrado en la figura. La variación de energía potencial gravitacional es

$$\Delta V_g = mg(h_B - h_A) = mg[s_B - 0]$$

$$\Delta V_g = 8kg(9,8m/s^2)(0,15m)$$

$$\Delta V_g = +11,76\ J \qquad (3)$$

La variación de energía potencial elástica será

$$\Delta V_e = \frac{1}{2}k[x_B^2 - x_A^2] = \frac{1}{2}(400N/m)[s_B^2 - 0]$$

$$\Delta V_e = 200N/m(0,15m)^2$$

$$\Delta V_e = +4,5\ J \qquad (4)$$

La única fuerza no conservativa es F, por tanto, el trabajo de esta fuerza es igual al producto del módulo de F por el desplazamiento vertical del cable sobre la polea, el cual vale

$$\Delta y = l_A - l_B = \sqrt{l^2 + b^2} - \sqrt{(l - s_B)^2 + b^2}$$

$$= \sqrt{(0,4)^2 + (0,3)^2} - \sqrt{(0,4 - 0,15)^2 + (0,3)^2}$$

$$\Delta y = 0,1095m$$

Es decir el trabajo será

$$U'_{A\to B} = F(\Delta y) = 0,1095F \qquad (5)$$

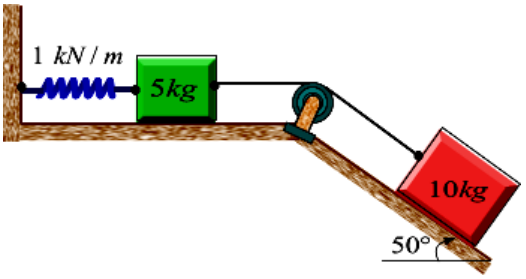
Remplazando las ecuaciones (2), (3), (4) y (5) en (1), resulta

$$\Delta T + \Delta V_g + \Delta V_e = U'_{A\to B}$$

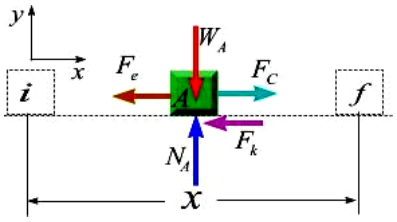
$$36J + 11,76J + 4,5J = 0,1095F$$

$$F = 477,3\ J \quad \text{Rta}$$

7. Los dos bloques mostrados en la figura están unidos mediante un hilo inextensible y sin peso. Se sueltan, partiendo del reposo, cuando el resorte está sin deformar. Los coeficientes de rozamiento estático y cinético valen *0,30* y *0,20*, respectivamente. Determine: (a) la máxima velocidad de los bloques y el alargamiento que esa condición sufre el resorte, (b) la máxima distancia que recorrerá el bloque de *10 kg*, hacia abajo, por el plano inclinado.



En la figura se muestra el DCL del bloque de 5 kg. Sobre él actúan las fuerzas: su peso (W_A), la reacción normal (N_A), la fuerza elástica (F_e), la fuerza de rozamiento y la tensión en el cable que une a los bloques.



En presencia de fuerzas conservativas, fuerzas no conservativas y fuerzas que no desarrollan trabajo, se utiliza el principio trabajo energía cinética

$$\Delta T = U_{i\to f}$$

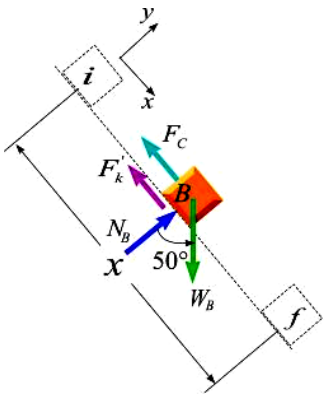
$$\frac{1}{2}m_A(v_f^2 - v_i^2) = \int_0^x [T - F_e - F_k]dx$$

$$\frac{1}{2}(5kg)[v_A^2 - 0] = \int_0^x Tdx - \int_0^x kxdx - \int_0^x \mu_k N_A dx$$

$$2,5v_A^2 = \int_0^x Tdx - \frac{1000}{2}x^2 - 0,2(5)(9,8)x$$

$$2,5v_A^2 = \int_0^x Tdx - 500x^2 - 9,8x \qquad (1)$$

En la figura se muestra el DCL del bloque de 10 kg. Sobre él actúan las fuerzas: su peso (W_B), la reacción normal (N_B), la fuerza de rozamiento (F_k) y la tensión en el cable que une a los bloques.



En presencia de fuerzas conservativas, fuerzas no conservativas y fuerzas que no desarrollan trabajo, se utiliza el principio trabajo energía cinética

$$\Delta T = U_{i\to f}$$

$$\frac{1}{2}m_B(v_{B,f}^2 - v_{B,i}^2) = \int_0^x [m_B g sen50° - T - F_k]dx$$

$$\frac{1}{2}(10kg)[v_B^2 - 0] = \int_0^x [98sen50° - T - 0,2(98)\cos 50°]dx$$

$$5v_B^2 = \int_0^x [75,07 - T - 12,59]dx$$

$$5v_B^2 = 62,48\ x - \int_0^x Tdx \qquad (2)$$

Por movimientos dependientes se tiene

$$s_A + s_B = L$$
$$v_A^- + v_B^+ = 0$$

$$v_A = v_B \qquad (3)$$

Remplazando la ecuación (3) en (2), resulta

$$5v_A^2 = 62,48\ x - \int_0^x Tdx \qquad (4)$$

Resolviendo las ecuaciones (1), y (4) resulta

$$7,5v_A^2 = 52,68\ x - 500\ x^2 \qquad (5)$$

Parte a. Para determinar la velocidad máxima se utiliza el criterio de máximos y mínimos.

$$\frac{d[7,5v_A^2]}{dx} = \frac{d}{dx}[52,68\ x - 500\ x^2]$$

$$15v_A\frac{dv_A}{dx} = 52,68 - 1000\ x = 0$$

$$x = 0,053m \qquad (6)$$

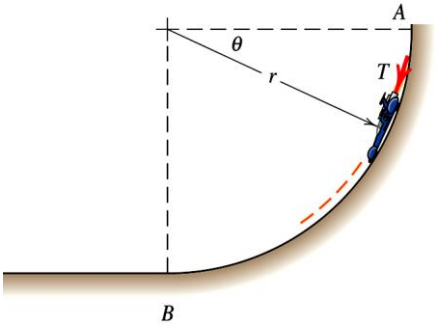
Remplazando la ecuación (6) en (5)

$$7,5v_A^2 = 52,68(0,053) - 500(0,053)^2$$
$$v_A = 0,589m/s$$

Parte (b). Distancia máxima que se mueve B. De la ecuación (5) se tiene que $v_B = 0$

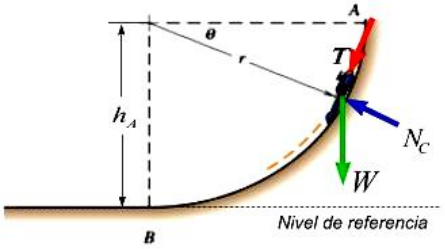
$$7,5v_B^2 = 52,68\ x - 500\ x^2$$
$$7,5(0)^2 = 52,68\ x - 500\ x^2$$
$$x = 0,324\ m \quad \text{Rta}$$

8. Un pequeño vehículo de propulsión por cohete, cuya masa es *m*, viaja hacia abajo por la trayectoria circular de radio efectivo *r* bajo la acción de su propio peso y del empuje constante **T** que le proporciona el motor. Si el vehículo parte del reposo en A. Determine: (a) la velocidad del vehículo cuando llega B y (b) la fuerza de reacción $\boldsymbol{N_B}$ ejercida por la guía sobre las ruedas justo antes de llegar a B. Desprecie el rozamiento y la pérdida de masa del cohete.



Solución

En la figura se muestra el DCL del carro. Sobre él actúan las fuerzas: su peso (W_A), la reacción normal (N_A), la fuerza elástica (F_e) y el empuje T.



Del DCL del carro se observa que sobre él actúan fuerzas conservativas (W), fuerzas que desarrollan trabajo y la fuerza de empuje (T) que siempre es tangente a la trayectoria y se considera no conservativa. Por tanto se usa el teorema del trabajo-energía mecánica para resolver el problema

$$\Delta T + \Delta V_g = U'_{A\to B} \qquad (1)$$

La carr inicia su movimiento en A con una velocidad nula ($v_A = 0$) y al pasar por el punto B su velocidad será (v_B). Entonces la variación de energía cinética será

$$\Delta T = \frac{1}{2}m(v_B^2 - v_A^2) = \frac{1}{2}m(v^2 - 0)$$

$$\Delta T = \frac{1}{2}m\, v_B^2 \qquad (2)$$

Usando el nivel de referencia mostrado en la figura. La variación de energía potencial gravitacional es

$$\Delta V_g = mg(h_B - h_A) = mg[-r]$$

$$\Delta V_g = -m\, g\, r \qquad (3)$$

Sobre el carro actúa el empuje la que consideramos como no conservativo. Por tanto, el trabajo de esta fuerza será.

$$U'_{A\to B} = \int_0^{\pi/2} (T\ \hat{e}_t).(ds\hat{e}_t) = \int_0^{\pi/2} T ds$$

$$U'_{A\to B} = T\int_0^{\pi/2} R d\theta = RT\int_0^{\pi/2} d\theta$$

$$U'_{A\to B} = RT(\frac{\pi}{2}) \qquad (4)$$

Remplazando las ecuaciones (2), (3) y (4) en la ecuación (1), resulta

$$\frac{1}{2}m\, v_B^2 - m\, g\, r = \frac{\pi r T}{2}$$

$$v_B = \sqrt{2g\, r + \frac{\pi r T}{m}} \quad \text{Rta.}$$

Aplicando la segunda ley de Newton en dirección normal cuando el carro pasa por B, se tiene

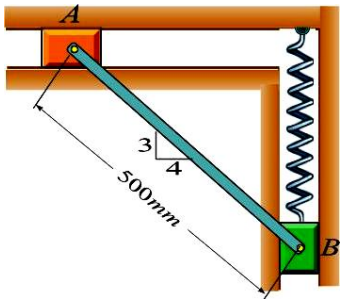
$$\sum F_n = ma_n = m\frac{v_B^2}{r}$$

$$N_B - mg = m\frac{v_B^2}{r}$$

$$N_B = mg + \frac{m}{r}[2gr + \frac{\pi r T}{m}]$$

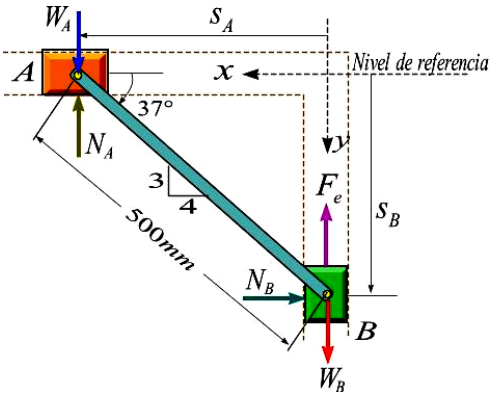
$$N_B = 3mg + \pi T \quad \text{Rta.}$$

9. El bloque A de *10 kg* representado en la figura está conectado al bloque B de *15 kg* mediante una barra de *500 mm* y de masa despreciable. Los bloques se mueven en ranuras lisas y parten del reposo en la posición definida en la figura. La constante del resorte es *400 N/m* y en la configuración representada su elongación es *150 mm*. Determine la velocidad de B después de desplazarse *100 mm* hacia abajo.



Solución

En la figura se muestra el DCL del sistema compuesto por la varilla más los dos bloques.



Del DCL se observa que sobre el sistema actúan fuerzas conservativas (W_A y W_B y F_e) y fuerzas que no desarrollan trabajo por ser perpendiculares a loa movimientos de los bloques (N_A y N_B). Por tanto se conserva la energía mecánica. Es decir

$$\Delta T + \Delta V_g + \Delta V_e = 0 \qquad (1)$$

La variación de energía cinética será

$$\Delta T = \frac{1}{2}m_A\ \left(v_{A,f}^2 - v_{A,i}^2\right) + \frac{1}{2}m_B\ \left(v_{B,f}^2 - v_{B,i}^2\right)$$

$$\Delta T == \frac{1}{2}(10)\ \left(v_A^2 - 0\right) + \frac{1}{2}(15)\ \left(v_B^2 - 0\right)$$

$$\Delta T = 5v_A^2 + 7{,}5v_B^2 \quad (2)$$

La relación entre velocidades se determina por movimientos dependientes, es decir

$$0{,}5^2 = s_A^2 + s_B^2$$

$$0 = 2s_A v_A + 2s_B v_B$$

$$v_A = \frac{s_B}{s_A}v_B \quad (3)$$

Cuando B ha descendido *100 mm* su nueva posición será s_B = *400 mm* y en estas condiciones la posición de A será s_A = *300 mm*. Entonces la velocidad de A será

$$v_A = \frac{0{,}4}{0{,}3}v_B = \frac{4}{3}v_B \quad (4)$$

Remplazando la ecuación (4) en (3), resulta

$$\Delta T = 5\left(\frac{4}{3}v_B\right)^2 + 7{,}5v_B^2 = 16{,}39v_B^2 \quad (5)$$

La variación de energía potencial según el nivel de referencia indicado será

$$\Delta V_g = m_A g(h_{A,f} - h_{A,i}) + m_B g(h_{B,f} - h_{B,i})$$

$$\Delta V_g = 10(9{,}8)(0-0) + 15(9{,}8)[-0{,}4 - (-0{,}3)]$$

$$\Delta V_g = -14{,}7J \quad (6)$$

La variación de energía potencial elástica será

$$\Delta V_e = \frac{1}{2}k\ \left(\delta_f^2 - \delta_i^2\right) \quad (7)$$

Como la elongación incial es 150mm, entonces, la deformación inical será

$$\delta_i = 0{,}15m \quad (8)$$

Al descender B una distancia de 100 mm, la deformación del resorte en esta nueva posición será

$$\delta_f = 0{,}15m + 0{,}1m = 0{,}25m \quad (9)$$

Remplazando, las ecuaciones (7) y (8) en (6), resulta

$$\Delta V_e = \frac{1}{2}(400)(0{,}25^2 - 0{,}15^5)$$

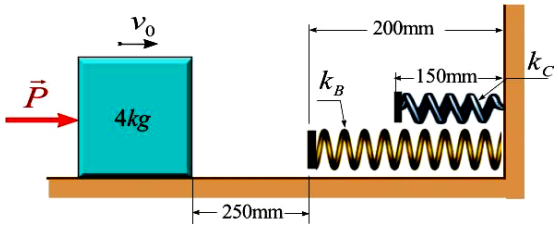
$$\Delta V_e = 8J \quad (10)$$

Al sustituir las ecuaciones (5), (6) y (10), resulta

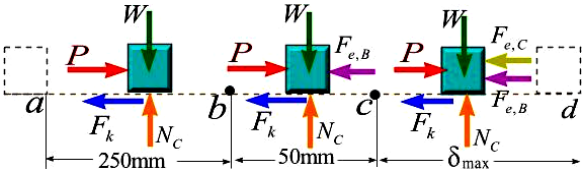
$$16{,}39v_B^2 - 14{,}7J + 8J = 0$$

$$v_B = 0{,}64m/s \quad \text{Rta}$$

10. El coeficiente de fricción entre el bloque de 4 kg y la superficie es μ_k = *0,20*. El bloque se encuentra sometido a la fuerza de magnitud y dirección constante *P = 30 N* y tiene una rapidez v_0 = *5 m/s* hacia la derecha cuando está en la posición mostrada. Determine la máxima deformación del resorte k_B = *2 kN/m* en el instante en que el bloque alcanza el reposo. Considere que el resorte pequeño tiene una constante de rigidez k_C = *6 kN/m*.



En la figura se muestra el DCL del bloque en diferentes posiciones de su movimiento.



Del DCL se observa que sobre el bloque actúan fuerzas conservativas (el peso y las fuerzas elásticas), fuerzas que no desarrollan trabajo (la reacción normal) y fuerzas no conservativas como P y F_k. Por tanto se usa el principio trabajo energía cinética para resolver el problema.

$$\Delta T = \sum U_{i\to f} \quad (1)$$

Como la velocidad inicial es diferente de cero (v_0 = *5m/s*) también lo será su energía cinética y el cuerpo después de comprimir al segundo resorte

llegará al reposo, su energía cinética será nula. Por tanto la variación de energía cinética será

$$\Delta T = \frac{1}{2} m \ v_d^2 - v_a^2$$

$$\Delta T = \frac{1}{2}(4kg) \ 0 - (5m/s)^2$$

$$\Delta T = 50J \quad (2)$$

Para determinar la fuerza de rozamiento se aplica la segunda ley de newton en dirección vertical

$$\uparrow \sum F_y = ma_y \Rightarrow N_C - mg = 0$$

$$N_C = mg$$

$$F_k = \mu_k N_C = 0,2(4kg)(9,8m/s^2)$$

$$F_k = 7,84N \quad (3)$$

El trabajo total es la suma algebraica del trabajo de la fuerza de rozamiento F_k, de la fuerza elástica $F_{e,B}$ y de la fuerza elástica $F_{e,C}$.

$$U_{i\to f} = \int_a^d (P - F_k)dx - \int_b^d F_{e,B}dx - \int_c^d F_{e,C}dx$$

$$= (P - F_k)s_{ad} - \int_b^d k_B x dx - \int_c^d k_C x dx$$

$$U_{i\to f} = (P - F_k)s_{ad} - \frac{1}{2}k_B s_{bd}^2 - \frac{1}{2}k_C s_{cd}^2$$

$$U_{i\to f} = 22,16(0,3 + \delta_{\max}) - \frac{1000}{2}(0,05 + \delta_{\max})^2 - \frac{3000}{2}\delta_{\max}^2$$

$$U_{i\to f} = 4,148 - 77,848\delta_{\max} - 4000\delta_{\max} \quad (4)$$

Remplazando las ecuaciones (2) y (4) en (1), resulta

$$-50 = 4,148 - 77,848\delta_{\max} - 4000\delta_{\max}$$

$$4000\delta_{\max} + 77,848\delta_{\max} - 54,148 = 0$$

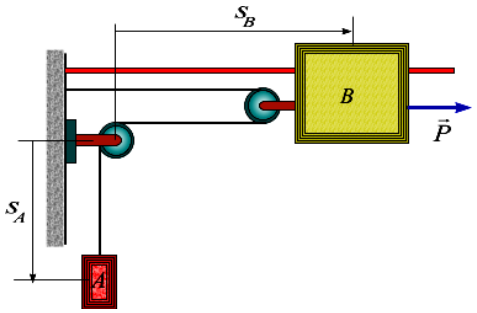
$$\delta_{\max} = 107mm$$

La deformación máxima del resorte externo será

$$d_B = 50mm + \delta_{\max} = 50mm + 107mm$$

$$d_B = 157mm \quad \text{Rta}$$

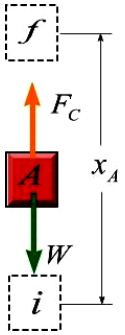
11. El sistema representado en la figura está inicialmente en reposo. Despreciando el rozamiento. Determine: (a) la magnitud de la fuerza $\vec{P}$ necesaria para que la velocidad de la deslizadera B sea de *4 m/s* cundo haya recorrido *500 mm* hacia la derecha y (b) la tensión correspondiente en el cable. Considere que las masas de los bloques A y B son *1kg* y *3 kg*, respectivamente.



Solución

Para resolver el problema se aplica el principio trabajo-energía cinética a cada uno de los cuerpos.

Para ello se traza el DCL de A como se muestra en la figura.



Como es sistema parte del reposo ($v_{A,i} = 0$) y cuando el collar se haya movido hacia la derecha 0,5 m, el bloque a asciende una distancia x_A y en este instante alcanzará una velocidad v_A. Entonces la variación de energía cinética para A será

$$\Delta T = \frac{1}{2} m \ v_{A,f}^2 - v_{A,i}^2$$

$$\Delta T = \frac{1}{2}(1kg) \ v_A^2 - 0$$

$$\Delta T = 0,5v_A^2 \quad (1)$$

El trabajo neto será la suma del trabajo de la fuerza de tensión en el cable (F_C) y por el peso de A (W_A). Entonces se tiene

$$U_{i\to f} = \int_i^f (F_C - m_A g)dy$$

$$U_{i\to f} = [F_C - (1kg)(9,8m/s^2)]x_A \quad (2)$$

Aplicando el principio trabajo-energía cinética, resulta

$$\Delta T = \sum U_{i\to f}$$
$$0,5v_A^2 = (F_C - 9,8)x_A \qquad (3)$$

Aplicando cinemática de movimientos dependientes se tiene

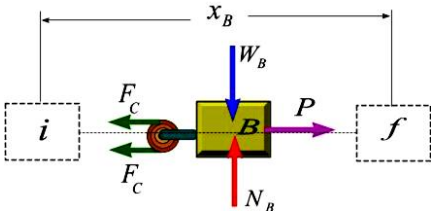
$$s_A + 2s_B = L$$
$$s_{A,i} + 2s_{B,i} = s_{A,f} + 2s_{B,f}$$
$$[s_{A,f} - s_{A,i}] = -[s_{B,f} - s_{B,i}]$$
$$|x_A| = |2x_B|$$
$$x_A = 2(0,5m) = 1m$$

$$v_A = 2v_B = 2(4m/s) = 8m/s$$

Remplazando en (3) resulta

$$0,5(8m/s)^2 = (F_C - 9,8)(1m)$$
$$32 = F_C - 9,8$$
$$F_C = 41,8N \qquad (4)$$

En la figura se muestra el DCL del collar B más la polea



Como es sistema parte del reposo ($v_{B,,i} = 0$) y cuando el collar se haya movido hacia la derecha *0,5 m*, su velocidad es $v_B = 4$ *m/s*. Entonces la variación de energía cinética para B será

$$\Delta T = \frac{1}{2}m\ v_{B,f}^2 - v_{B,i}^2$$
$$\Delta T = \frac{1}{2}(3kg)[(4m/s)^2 - 0]$$
$$\Delta T = 24J \quad (5)$$

El trabajo es producido por las fuerzas P y F_C. Entonces el trabajo neto será

$$U_{i\to f} = \int_i^f (P - 2F_C)dx$$
$$U_{i\to f} = (P - 2F_C)x_B$$
$$U_{i\to f} = (P - 2F_C)(0,5m) \quad (6)$$

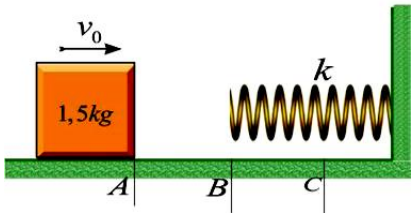
Aplicando el principio trabajo-energía cinética, se tiene

$$\Delta T = U_{i\to f}$$
$$24J = (P - 2F_C)(0,5m) \quad (7)$$

Remplazando la ecuación (4) en (7), resulta

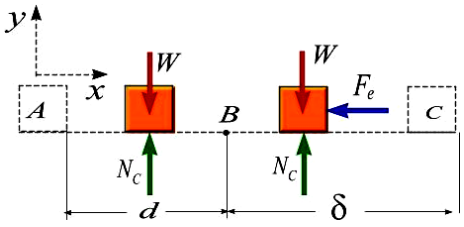
$$24J = [P - 2(41,8](0,5m)$$
$$P = 131,6N \quad \text{Rta}$$

12. El bloque de *1,5 kg* que se está moviendo por el plano horizontal liso choca contra un resorte no lineal con una velocidad de *4 m/s* como se muestra en la figura. Se dice que el resorte es no lineal ya que la fuerza elástica en él viene expresado por la ecuación $F_e = kx^2$, donde $k = 900\ N/m^2$. Determine la rapidez del bloque después de que ha comprimido al resorte una distancia $\delta = 0,2\ m$.



Solución

En la figura se muestra el DCL del bloque en las diferentes posiciones de interés.



En la figura se observa que las fuerzas que actúan sobre el bloque son W, N_C y la fuerza elástica F_e la cual depende del cuadrado de la deformación. Por tanto se aplica el principio trabajo-energía cinética
Como de A hasta B no existe rozamiento la velocidad será la misma ($v_A = v_B = v_0 = 4\ m/s$) y cuando el bloque ha comprimido una distancia δ, el bloque tendrá una velocidad $v_C = v$. Entonces la variación de energía cinética será

$$\Delta T = \frac{1}{2}m\ v_C^2 - v_A^2$$
$$\Delta T = \frac{1}{2}(1,5kg)[v_C^2 - (4m/s)^2]$$

$$\Delta T = 0,75(v_C^2 - 16) \qquad (1)$$

Del diagrama de cuerpo libre se observa que la única fuerza que realiza trabajo es la fuerza elástica. Entonces el trabajo neto será

$$U_{A\to C} = U_{A\to B} + U_{B\to C} = 0 + \int_B^C (-F_e\hat{i}).(dx\hat{i})$$

$$U_{A\to C} = -\int_B^C kx^2 dx = -\frac{k}{3}s_{BC}^3$$

$$U_{A\to C} = -\frac{900}{3}(0,2)^3 = 2,4J \qquad (2)$$

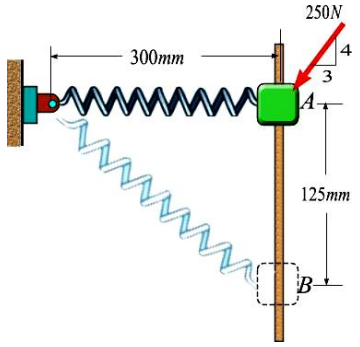
Aplicando el principio trabajo-energía cinética, resulta

$$\Delta T = \sum U_{i\to f}$$

$$0,75(v_C^2 - 16) = -2,4$$

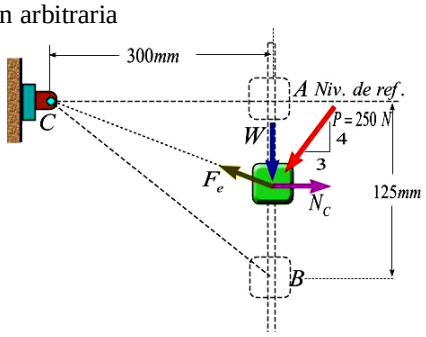
$$v_C = 3,58m/s \quad \text{Rta.}$$

13. El collar de *30 kg* mostrado en la figura, parte del reposo en la posición A. Si el resorte inicialmente no se encuentra deformado. Determine la constante elástica del resorte sabiendo que la velocidad del collar es de *1,5 m/s* después que se ha deslizado *125 mm* hacia abajo. La barra es lisa y la fuerza de *250 N* conserva su pendiente durante todo el movimiento.



Solución

En la figura se muestra el DCL del collar en una posición arbitraria



Del diagrama se observa que sobre el collar actúan fuerzas conservativas (W y F_e), fuerzas que no desarrollan trabajo (N_C) y una fuerza no conservativa ($P = 250\ N$). Por tanto se aplica el teorema trabajo-energía mecánica.

$$\Delta T + \Delta V_g + \Delta V_e = U_{A\to B}^{F_k} \qquad (1)$$

Como el collar parte del reposo en A su velocidad será nula ($v_A = 0$) y al pasar por B su velocidad es $v_B = 1,5\ m/s$. Entonces la variación de energía cinética será

$$\Delta T = \frac{1}{2}m\ v_B^2 - v_A^2$$

$$\Delta T = \frac{30kg}{2}[(1,5m/s)^2 - 0]$$

$$\Delta T = 33,75J \qquad (2)$$

Teniendo en cuenta el nivel de referencia mostrado la variación de la energía potencial gravitacional será

$$\Delta V_g = mg(h_B - h_A)$$

$$\Delta V_g = 30kg(9,8m/s^2)[(-0,125m) - 0]$$

$$\Delta V_g = -36,75J \qquad (3)$$

Para determinar la variación de la energía potencial elástica primero se determina las deformaciones inicial y final del resorte, sabiendo que éste tiene una longitud natural $L_0 = 300$ mm. La deformación inicial será

$$\delta_i = L_A - L_0 = 0,3m - 0,3m = 0$$

La deformación final será

$$\delta_f = L_B - L_0 = \sqrt{0,3^2 + 0,125^2}\,m - 0,3m$$

$$\delta_f = 0,025m$$

Entonces, la variación de energía potencial será

$$\Delta V_e = \frac{1}{2}k[\delta_B^2 - \delta_A^2] = \frac{k}{2}[(0,025m)^2 - 0)$$

$$\Delta V_e = 0,0003125\ k \qquad (4)$$

El trabajo de la fuerza no conservativa será

$$U_{A\to B}^P = \int_A^B (-Psen\alpha\,\hat{j}).(-dy\hat{j})$$

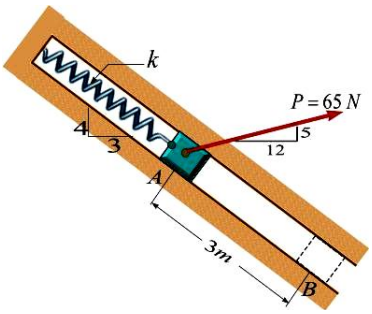
$$U_{A\to B}^P = \int_A^B 250N(4/5)dy$$

$$U^{P}_{A\to B} = \int_A^B (-Psen\alpha\,\hat{j}).(-dy\hat{j})$$
$$= \int_A^B 250N(4/5)dy$$
$$U^{P}_{A\to B} = 200N(s_{AB}) = 200N(0{,}125m)$$
$$U^{P}_{A\to B} = 25J \qquad (5)$$

Remplazando las ecuaciones (2), (3), (4) y (5) en (1), resulta

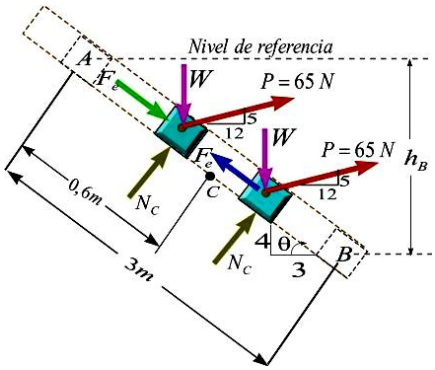
$$\Delta T + \Delta V_g + \Delta V_e = U^{F_k}_{A\to B}$$
$$33{,}75J - 36{,}75J + 0{,}0003125k = 25J$$
$$k = 89{,}6kN/m \quad \text{Rta}$$

14. El bloque de *5 kg* de masa, mostrado en la figura, se mueve en la ranura lisa y está fijo al extremo de un resorte cuya constante elástica es *k = 60 N/m*. Cuando el resorte está comprimido *0,6 m*, la velocidad del bloque en A es de *1 m/s* en el sentido de descenso. La magnitud y dirección de la fuerza **P** = *65 N* no cambian durante el movimiento. Determine la velocidad del bloque después de haberse desplazado *3 m* en sentido de descenso.



Solución

En la figura se observa el DCL del bloque en las posiciones de interés.



De la figura se observa que sobre el bloque actúan fuerzas conservativas el peso W y la fuerza elástica F_e que actúa a compresión desde A a C y a tensión desde C hasta B, la reacción normal N_C que no desarrolla trabajo y la fuerza P que se considera no conservativa. Por tanto se usa el principio trabajo-energía cinética para resolver el problema

$$\Delta T + \Delta V_g + \Delta V_e = U^{F_k}_{A\to B} \quad (1)$$

El bloque inicia su movimiento en A con una velocidad v_A = 1 m/s hacia abajo y al pasar por B su velocidad es v_B. Entonces la variación de energía cinética será

$$\Delta T = \frac{1}{2}m\ v_B^2 - v_A^2$$
$$\Delta T = \frac{5kg}{2}[v_B^2 - (1m/s)^2]$$
$$\Delta T = 2{,}5[v_B^2 - 1]$$
$$\Delta T = 2{,}5[v_B^2 - 1] \quad (2)$$

Teniendo en cuenta el nivel de referencia mostrado la variación de la energía potencial gravitacional será

$$\Delta V_g = mg(h_B - h_A)$$
$$= 5kg(9{,}8m/s^2)[(-3sen\theta) - 0]$$
$$\Delta V = 49[-3(4/5)]$$
$$\Delta V_g = -117{,}6J \quad (3)$$

Para determinar la variación de la energía potencial elástica primero se determina las deformaciones inicial y final del resorte

La deformación inicial según el enunciado es

$$\delta_i = 0{,}6m$$

La deformación final será

$$\delta_f = 3m - 0{,}6m = 2{,}4m$$

Entonces, la variación de energía potencial será

$$\Delta V_e = \frac{1}{2}k[\delta_B^2 - \delta_A^2]$$
$$\Delta V_e = \frac{60N/m}{2}[(2{,}4m)^2 - (0{,}6m)^2]$$
$$\Delta V_e = 162J \qquad (4)$$

La única fuerza no conservativa que realiza trabajo es la componente de P paralela a la ranura. Entonces el trabajo de la fuerza no conservativa será

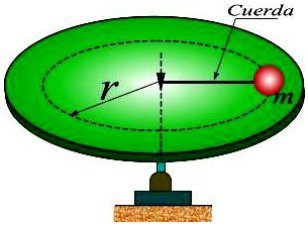
$$U^{P}_{A\to B} = \int_A^B (P\cos(\alpha+\theta)\hat{i}).(dx\hat{i})$$
$$= \int_A^B 65N[\cos\alpha\cos\theta - sen\alpha sen\theta]dx$$
$$U^{P}_{A\to B} = 65N[(12/13)(3/5)-(5/13)(4/5)](3m)$$

$$U^{P}_{A\to B} = 48J \qquad (5)$$

Remplazando las ecuaciones (2), (3), (4) y (5) en (1), resulta

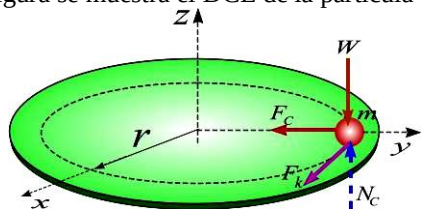
$$2,5[v_B^2 - 1] - 117,6J + 162J = 48J$$
$$v_B = 1,56m/s \quad \text{Rta}$$

15. Una partícula de masa *m* se mueve en una trayectoria circular de radio *r* sobre una mesa rugosa. La partícula está unida a una cuerda fija en el centro del círculo. La velocidad inicial de la partícula es v_0 y después de completar una vuelta la velocidad se ha reducido a $v_0/2$. (a) Determine el trabajo realizado por la fuerza de rozamiento durante una vuelta en función de *m*, *r* y v_0. (b) ¿Cuál sería el coeficiente de fricción por deslizamiento? y (c) ¿cuál sería el número de vueltas que daría la partícula hasta alcanzar el reposo?.



Solución

En la figura se muestra el DCL de la partícula



Sobre la partícula actúan fuerzas que no desarrollan trabajo: fuerza en la cuerda F_C, el peso *W* y la reacción normal N_C por ser perpendiculares al movimiento y la fuerza de rozamiento F_k que todo el tiempo es tangente a la trayectoria y es una fuerza no conservativa. Por tanto se aplica el principio trabajo-energía mecánica.

$$\Delta T + \Delta V_g = U^{F_k}_{A\to B} \quad (1)$$

Según condición del problema al inicio la partícula tiene una velocidad inicial v_0 y al finalizar la primera vuelta tiene una velocidad tangente a la circunferencia de $v_0/2$. Entonces la variación de energía cinética será

$$\Delta T = \frac{1}{2}m\ v_f^2 - v_i^2$$
$$\Delta T = \frac{1}{2}m\left[(v_0/2)^2 - v_0^2\right] = -\frac{3}{8}mv_0^2 \qquad (2)$$

Debido a que el movimiento se realiza en el plano horizontal x-y, no existe diferencia de alturas por tanto, la variación de energía potencial gravitacional será

$$\Delta V_g = mg(h_f - h_i) = mg(0-0)$$
$$\Delta V_g = 0 \quad (3)$$

Remplazando las ecuaciones (2) y (3) en (1), se tiene

$$-\frac{3}{8}mv_0^2 + 0 = U^{F_k}_{1\to f}$$
$$U^{F_k}_{1\to f} = -\frac{3}{8}mv_0^2 \quad (4)$$

Parte (b) Cálculo del coeficiente de fricción cinética. De la definición de trabajo de la fricción se tiene

$$U^{F_k}_{1\to f} = \int_i^f (-F_k\hat{e}_t).(ds\hat{e}_t)$$
$$U^{F_k}_{1\to f} = -\int_0^{2\pi} F_k(rd\theta) = -\int_0^{2\pi}\mu_k N_C(rd\theta)$$
$$U^{F_k}_{1\to f} = -\int_0^{2\pi}\mu_k mg(rd\theta) = -\mu_k mgr\int_0^{2\pi} d\theta$$
$$-\frac{3}{8}mv_0^2 = -\mu_k mgr(2\pi)$$
$$\mu_k = \frac{3v_0^2}{16\pi g\ r} \quad \text{Rta} \quad (5)$$

Parte (c). Cálculo del número de vueltas N que la partícula da hasta llegar al reposo. Se plica el principio trabajo-energía mecánica

$$\Delta T + \Delta V_g = U^{F_k}_{i\to f}$$
$$\frac{1}{2}m\ v_f^2 - v_i^2 + mg(h_f - h_i) = -\int_0^{\theta}\mu_k mg(rd\theta)$$

$$\frac{1}{2}m\ \ 0-v_0^2\ \ +mg(0-0)=-\mu_k mgr\theta$$

$$\theta=\frac{v_0^2}{2\mu_k gr}=\frac{v_0^2}{2[\frac{3v_0^2}{16\pi g\ r}]gr}$$

$$\theta=\frac{8\pi}{3}rad \qquad (6)$$

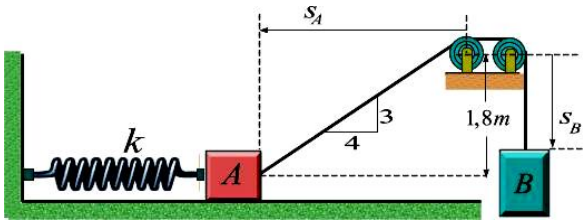
El número de vueltas será

$$1\ vuelta\rightarrow 2\pi\ rad$$

$$N\rightarrow\frac{8\pi}{3}ra$$

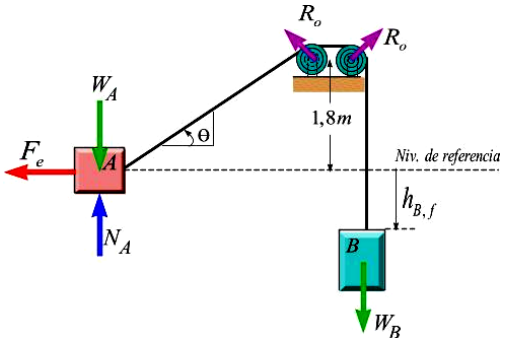
$$N=\frac{4}{3}vueltas \quad \text{Rta}$$

16. El cuerpo A de *300 kg* representado en la figura se mueve sobre un plano horizontal liso. En la posición mostrada, la velocidad del cuerpo B de *60 kg* es de *2,4 m/s* hacia abajo y la elongación del resorte es de 0,60 m. La constante del resorte es *k = 300 N/m*. Determine la velocidad del cuerpo A cuando pasa bajo el tambor liso C.



Solución

En la figura se muestra el DCL del sistema formado por los cuerpos A y B unidos por la cuerda



Sobre el sistema actúan fuerzas no desarrollan trabajo (R_0, N_A, W_A) y fuerzas conservativas (F_e, W_B). Entonces se conserva la energía mecánica

$$\Delta T+\Delta V_g+\Delta V_e=0 \qquad (1)$$

Para determinar la variación de energía cinética, primero se determina la relación entre posiciones y velocidades de ambos cuerpos mediante cinemática del movimiento dependiente

$$s_B+\sqrt{1,8^2+s_A^2}=L$$

$$v_B+\frac{1}{2}(1,8^2+s_A^2)^{-1/2}(2s_A)v_A=0$$

$$v_B^{+}+\frac{s_A}{\sqrt{1,8^2+s_A^2}}v_A^{-}=0$$

$$v_B=\frac{s_A}{\sqrt{1,8^2+s_A^2}}v_A \qquad (2)$$

Cuando $v_{B,i}$ = *2,4m/s* hacia abajo, s_A = *2,4 m*, entonces la velocidad de A será

$$2,4m/s=\frac{2,4}{\sqrt{1,8^2+2,4^2}}v_{A,i}$$

$$v_{A,i}=3m/s\rightarrow$$

Entonces, la variación de energía cinética será

$$T=\frac{1}{2}m_A\left[v_{A,f}^2-v_{A,i}^2\right]+\frac{1}{2}m_B\left[v_{B,f}^2-v_{B,i}^2\right]$$

$$\Delta T=\frac{300kg}{2}[v_A^2-(3m/s)^2]+\frac{60kg}{2}[v_B^2-(2,4m/s)^2]$$

$$\Delta T=150[v_A^2-9]+30[v_B^2-5,76]$$

$$\Delta T=150v_A^2+30v_B^2-1522,8$$

$$\Delta T=150v_A^2+30\left[\frac{s_A}{\sqrt{1,8^2+s_A^2}}v_A\right]^2+1522,8$$

$$\Delta T=150v_A^2+30\left[\frac{0}{\sqrt{1,8^2+s_A^2}}v_A\right]^2+1522,8$$

$$\Delta T=150v_A^2+1522,8 \qquad (4)$$

Teniendo en cuenta el nivel de referencia mostrado en la figura. La energía potencial gravitacional es

$$\Delta V_g=m_A g(h_{A,f}-h_{A,i})+m_A g(h_{B,f}-h_{B,i})$$

$$\Delta V_g=300(9,8)(0-0)+60(9,8)(-h_{B,f}-0)$$

$$\Delta V_g=-588(1,2)=-705,6J \qquad (5)$$

Para determinar la variación de la energía potencial elástica se necesita las deformaciones inicial y final del resorte.

- Deformación inicial. Del enunciado el resorte está estiradao0,6 m, es decir la deformación será

$$\delta_i = 0,6m$$

- Cuando A avanza hacia la derecha, al alcanzar la posición inferior debajo de las poleas habrá avanzado $s_A = 2,4m$. Entonces la deformación final del resorte será

$$\delta_f = 0,6m + s_A = 0,6m + 2,4m = 3m$$

Entonces, la variación de la energía potencial elástica será

$$\Delta V_e = \frac{1}{2}k[\delta_f^2 - \delta_i^2]$$

$$\Delta V = \frac{300N/m}{2}[(3m)^2 - (0,6m)^2]$$

$$\Delta V = 1296J \qquad (6)$$

Remplazando las ecuaciones (4), (5) y (6), resulta

$$\Delta T + \Delta V_g + \Delta V_e = 0$$

$$150v_A^2 - 1522,8 - 705,6J + 1296J = 0$$

$$150v_A^2 = 932,4$$

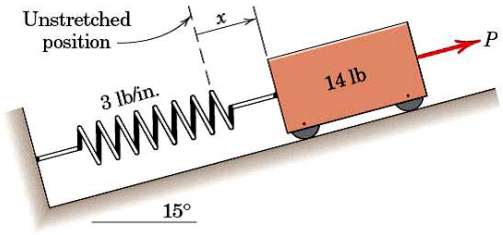
$$v_A = 2,49m/s \quad \text{Rta}$$

17.

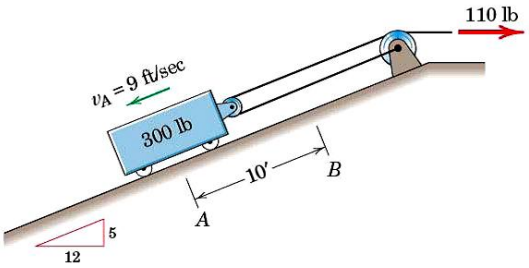
18.

X. PROBLEMAS PROPUESTOS

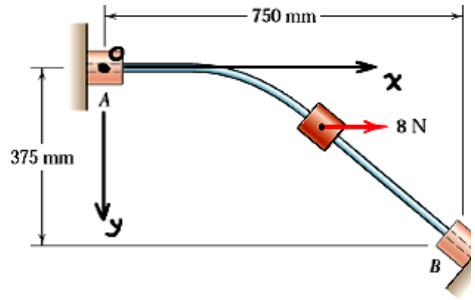
1. Bajo la acción de la fuerza P, el carro se mueve desde la posición $x_1 = -6$ *pulgadas*, hasta la posición $x_2 = 3$ *pulgadas*. Determine: (a) el trabajo que realiza el resorte sobre el cuerpo y (b) el trabajo que sobre el cuerpo realiza su propio peso.



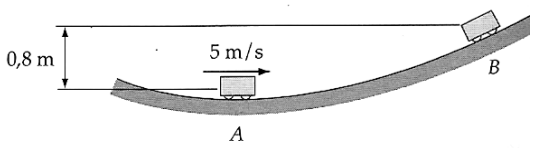
2. El bloque de *300 lb* inicia su descenso por el plano inclinado con una velocidad de *9 pies/s*, cuando al extremo del cable se aplica una fuerza constante de *110 lb*. Determine la velocidad del carro cuando pasa por la posición B.



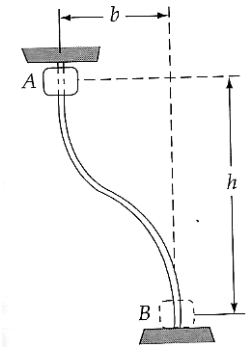
3. El anillo de 0.8 kg se desliza con el rozamiento despreciable a lo largo de la varilla inmovilizada en el plano vertical. Si el anillo parte del reposo en A bajo la acción de la fuerza horizontal constante de 8N, calcular su velocidad *v* cuando choca con el tope B.



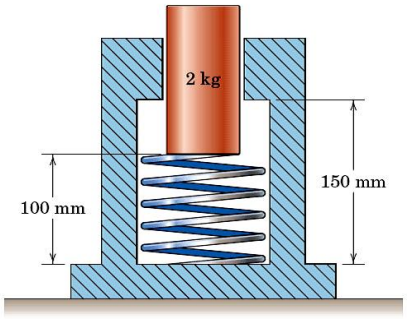
4. En el punto A el pequeño cuerpo posee una celeridad $v_A = 5$ *m/s*. Despreciando el rozamiento, hallar su celeridad v_B en el punto B tras haberse elevado *0,8 cm*. ¿es necesario conocer el perfil de la pista?



5. En el pequeño collar de masa *m* se suelta desde el reposo en A y se desliza, sin rozamiento apreciable, por la varilla curva vertical. Exprese, en función de las condiciones dadas, la velocidad *v* del collar cuando choca con la base B.

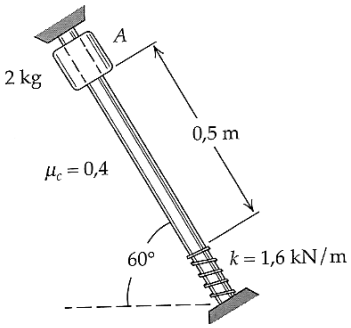


6. El embolo de 2 kg es liberado del reposo en la posición mostrada- El resorte tiene una constante de rigidez de 500 N/m y una longitud sin deformar de 200 mm. Determine la máxima altura h medida desde la posición inicial, alcanzada por el émbolo.

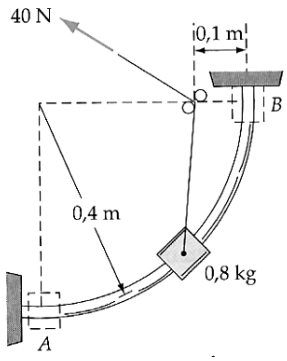


7. El vector de posición de un punto material es $\mathbf{r} = 8t\boldsymbol{i} + 1{,}2\,t^2\boldsymbol{j} - 0{,}5(t^3 - 1)\mathbf{k}$, donde t es el tiempo en segundos desde el inicio del movimiento y **r** se expresa en metros. Para el instante $t = 4$s, determinar la potencia P desarrollada por la fuerza $\mathbf{F} = 10\mathbf{i} - 20\mathbf{j} - 36\mathbf{k}$ N que actúa sobre el punto material.

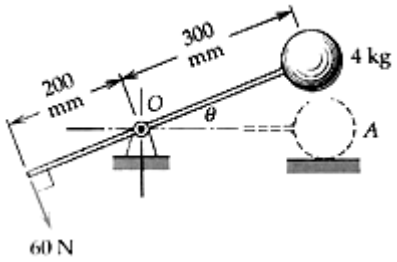
8. El anillo de *2 kg* se abandona desde el reposo en A y se desliza por la varilla inclinada fija en el plano vertical. El coeficiente de rozamiento cinético es $\mu_K = 0{,}4$. Calcular: (*a*) la velocidad *v* del anillo cuando golpea contra el resorte y (*b*) el acortamiento máximo *x* del resorte.



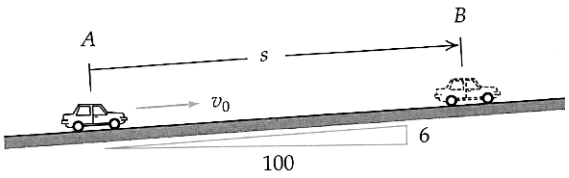
9. El anillo de *0,8 kg* se desliza libremente por la varilla circular fija. Calcular su velocidad *v* cuando choca con el tope B sabiendo que sube bajo la acción de la fuerza constante de *40 N* que se ejerce sobre la cuerda. Ésta está guiada por las pequeñas poleas fijas.



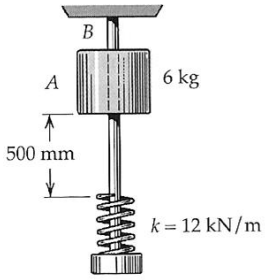
10. La bola de 4kg y la varilla liviana a ella unida rotan en un plano vertical en torno al eje fijo O. Si el conjunto se abandona desde el reposo en θ = *0* y se mueve bajo la acción de la fuerza de *60N*, que se mantiene normal a la varilla, hallar la velocidad *v* de la bola cuando θ tiende a *90º*. La bola puede tratarse como masa puntual.



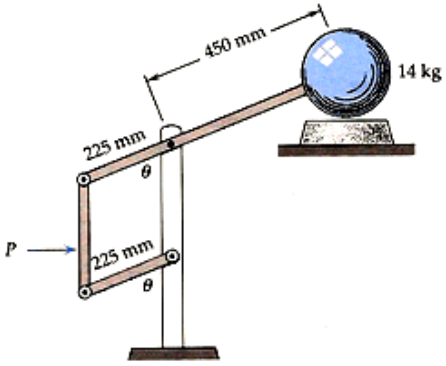
11. El automóvil sube con una celeridad v_0 *=105 km/h* por la pendiente del *6* por ciento cuando el conductor aplica los frenos en el punto A, haciendo que todas las ruedas patinen. El coeficiente de rozamiento en la calzada resbaladiza de lluvia es μ_k = *0,6*. Halle la distancia de parada S_{AB}. Repetir los cálculos para el caso en que el vehículo se mueva cuesta abajo de B a A.



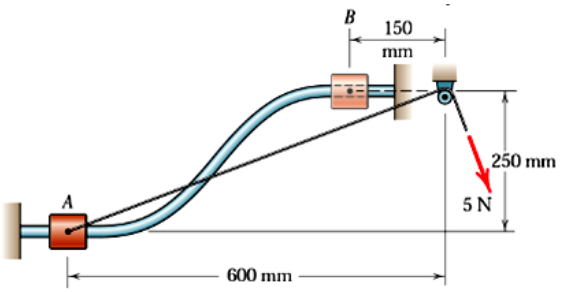
12. El collar cilíndrico de *6 kg* se suelta desde el reposo en la posición indicada. Calcular su velocidad *v* cuando el resorte se ha comprimido *50 mm*.



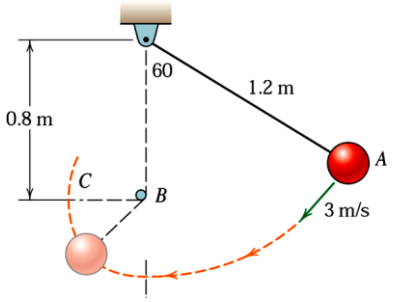
13. Al sistema articulado se aplica una fuerza horizontal constante *P = 700N* del modo en que se indica. Estando la esfera de *14 kg* inicialmente en reposo sobre el soporte cuando θ se aproxima al valor cero y la bola se acerca a su posición más alta.



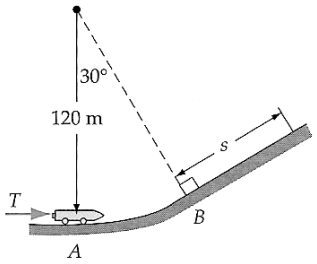
14. Un collarín de 0,2 kg desliza libremente en un plano vertical a lo largo de la curva fija desde a hasta B bajo la acción de la fuerza constante *F = 5 N* aplicada al extremo del cable como se muestra en la figura. Si el collarín inicia su movimiento desde el reposo en A. Determine la velocidad con la cual pasa por B.



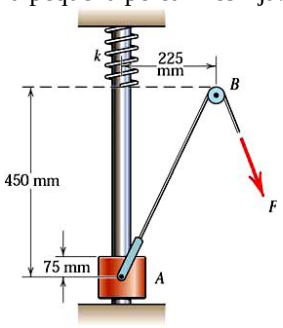
15. La esfera parte de la posición A con una velocidad de *3 m/s* y oscila en un plano vertical. En la posición más baja, el cordón choca con una barra fija en B y la esfera continúa oscilando siguiendo el arco punteado. Determine: (a) la velocidad de la esfera cuando llega a la posición más baja, (b) la tensión en la cuerda cuando esta está es posición vertical y (c) la velocidad de la esfera cuando pasa por la poción C.



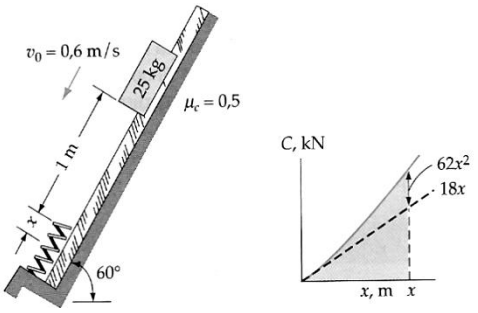
16. Un vehículo de prueba pequeño, propulsado por cohete, con una masa total de *100 kg*, parte del reposo en A y avanza, con rozamiento despreciable, a lo largo de la pista en el plano vertical según s indica. Si el cohete propulso ejerce un empuje constante **T** de *1,5 kN* desde A hasta B en que se apaga, hallar la distancia *s* que rueda el vehículo por la pendiente antes de pararse. La pérdida de masa por la expulsión de gases del cohete es pequeña y se puede despreciar.



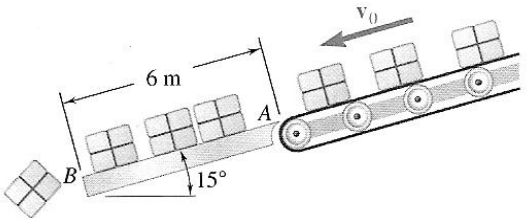
17. El anillo A de *7 kg* se desliza sin rozamiento apreciable por la barra vertical. Cuando el anillo parte del reposo desde la posición más baja, señalada en la figura, se mueve hacia arriba bajo la acción de una fuerza constante *F = 200 N* aplicada mediante el cable. Calcular la constante *k* del resorte para que la compresión de éste quede limitada sólo a *75 mm*. La posición de la pequeña polea B es fija.



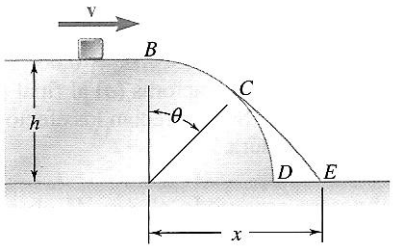
18. En la posición inicial indicada la corredera de *25 kg* está animada de una velocidad v_0 =0,6m/s al deslizarse por el raíl inclinado bajo la acción de la gravedad y el rozamiento. Entre la corredera y el raíl hay un coeficiente de rozamiento cinético de μ_k = *0,5*. Calcular la velocidad de la corredera cuando pasa por la posición en que el resorte se ha comprimido una distancia x =100 mm. El resorte ofrece una resistencia a la compresión C y es del tipo "duro", pues su rigidez aumenta con la deformación tal como se muestra en la gráfica adjunta.



19. Una correa transportadora lleva cajas a una velocidad $\mathbf{v}_0$ hasta una rampa fija en A, por la que resbalan para acabar cayendo fuera en B. Sabiendo que μ_k = *0,40*, hallar la velocidad de la correa si las cajas salen por B con una velocidad de *2,4 m/s*.

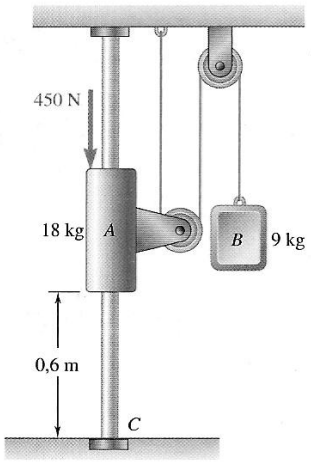


20. Un pequeño bloque desliza con una celeridad *v = 2 ,4 m/s* por una superficie horizontal a una altura *h = 0,9 m* sobre el suelo. Hallar (a) el ángulo θ de despegue de la superficie cilíndrica BCD, (b) la distancia *x* a la que choca con el suelo. Se desprecian el rozamiento y la resistencia del aire.

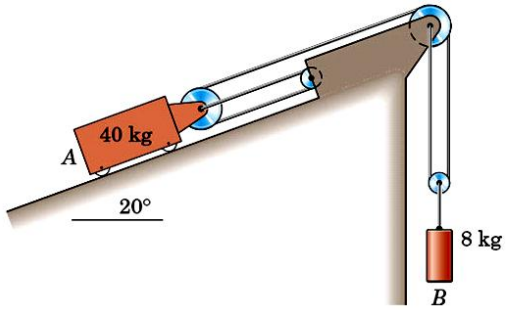


21. El sistema de la figura, compuesto de una corredera A de 18kg y un contrapeso B de *9 kg*, está en reposo

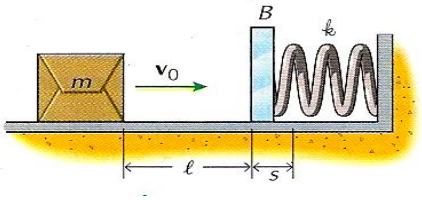
cuando se aplica una fuerza constante de *450 N* a la corredera A. (a) Hallar la velocidad de A justo antes de chocar con el tope C. (b) Resolver la parte a suponiendo que el contrapeso B se sustituya por una fuerza de *900N* dirigida hacia abajo. Desprecie el rozamiento y las masas de las poleas.



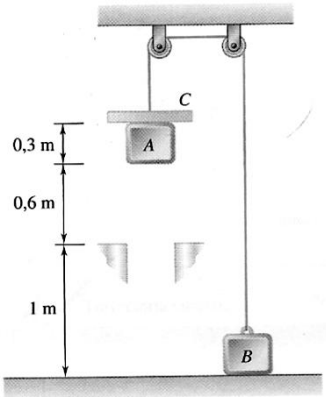
22. El sistema mostrado en la figura se abandona del reposo en la posición mostrada en la figura. Asumiendo que las superficies son lisas y que las masas de las poleas son despreciables. Determine. Determine la velocidad de ambas masas después de que B se ha movido una distancia *d = 1,00 m*.



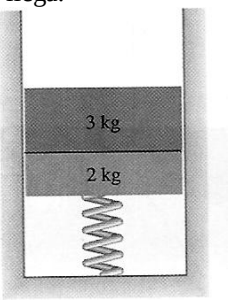
23. Cuando los bultos salgan de una rampa inclinada con demasiada velocidad, será necesario un tope como el representado en la figura para pararlos, el coeficiente de rozamiento entre el bulto y el suelo es $\mu_k = 0,25$, la constante del resorte es *k = 1750 N/m* y la masa del tope B es despreciable. Si la celeridad de un bulto de *2,5 kg* es $v_o = 8$ *m/s* cuando se halle a *l = 3 m* del tope. Determinar: (a) El máximo acortamiento δ del resorte y (b) la posición final del bulto en el reposo.



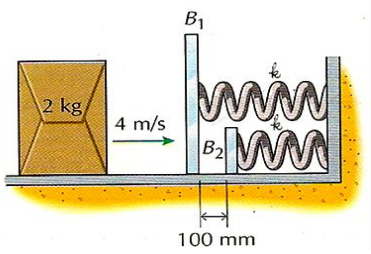
24. Dos bloques A y B, de masas respectivas *4 kg* y *5 kg*, están unidos por una cuerda que pasa por un polea como se muestra. Sobre el bloque A se coloca un anillo de *3 kg* y el sistema se deja en movimiento desde el reposo. Cuando los bloques han recorrido *0,9 m*, se retira el anillo C y los bloques siguen moviéndose. Hallar la celeridad del bloque A justo antes de chocar con el suelo.



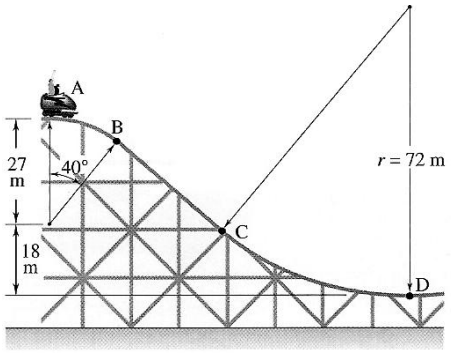
25. Un bloque de *3 kg* descansa sobre un bloque de *2 kg* colocado sobre un muelle de constante *40 N/m*, pero no solidario de éste. El bloque de arriba se retira repentinamente. Determine: (a) la velocidad máxima que alcanza el bloque de *2 kg*, (b) la altura máxima a la que el mismo llega.



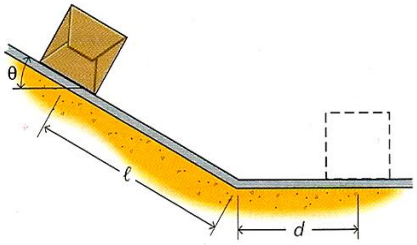
26. Un bloque de *2 kg* desliza por un piso sin fricción y choca contra los topes mostrados en la figura. Los dos resortes lineales son iguales y de constante recuperadora *k = 1,5 kN/m*, pudiéndose despreciar las masas de los topes. Si la celeridad inicial del bloque es *4 m/s*. Determine la máxima deformación de los resortes.



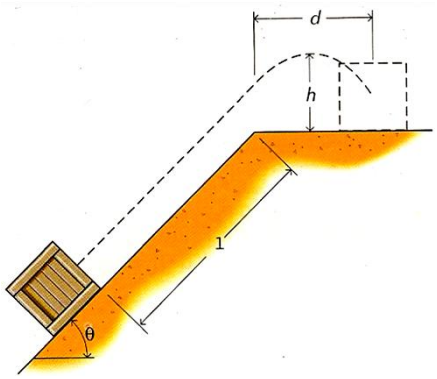
27. Un tramo de una montaña rusa se compone de dos arcos circulares AB y CD unidos por un trecho recto BC. El radio de curvatura de AB es de *27 m* y el de CD de *72 m*. El coche y sus ocupantes, de masa total *254 kg*, llegan al punto A prácticamente sin velocidad y luego descienden libremente pista abajo. Hallar los valores máximo y mínimo de la fuerza normal que la pista ejerce en el coche cuando éste se mueve de A a D. Se desprecian la resistencia del aire u la resistencia a la rodadura.



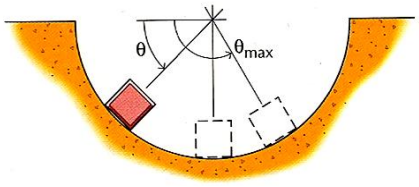
28. En un tinglado, se mueven bultos entre distintos niveles haciéndolos deslizar hacia abajo por las rampas, según se indica en la figura. Si el coeficiente de rozamiento entre el bulto y la rampa vale μ_k = 0,20. El ángulo en la base de la rapa es brusco pero liso y $\theta = 30°$. Si un bulto de masa *10 kg* en *l = 3 m* se lanza con una velocidad de *5 m/s* hacia abajo. Determine: (a) la celeridad del bulto cuando llega a la posición más bajo de la rampa y (b) la distancia *d* que recorrerá el bulto sobre la superficie antes de detenerse.



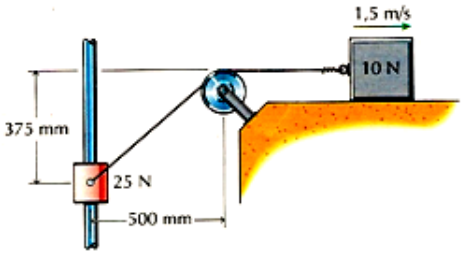
29. Una caja de *25 N* de peso asciende por una rampa inclinada *25°* con una celeridad incial de *13,5 m/s*, según se indica en la figura. Si el coeficiente de rozamiento entre la rampa y la caja es $\mu_k = 0{,}3$ y *l = 3 m*. Determine: (a) la celeridad de la caja cuando alcance la parte más alta de la rampa. (b) la máxima altura *h* que alcanzará la caja. Y (c) la distancia *d* a la cual la caja cocará contra la superficie horizontal.



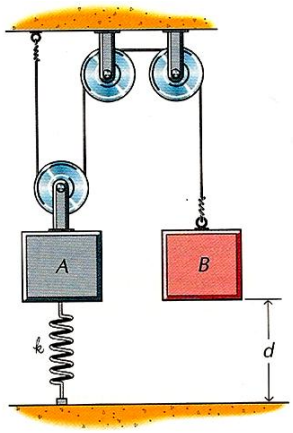
30. Un bloque de *5 kg* se desliza por el interior de un canjilón cilíndrico, según se indica en la figura. El radio del cilindro es de 3 m. Si el bloque parte del reposo cuando $\theta = 30°$. Determine: (a) la velocidad cuando $\theta = 90°$ y (b) la fuerza que ejerce la superficie sobre el bloque cuando $\theta = 120°$.



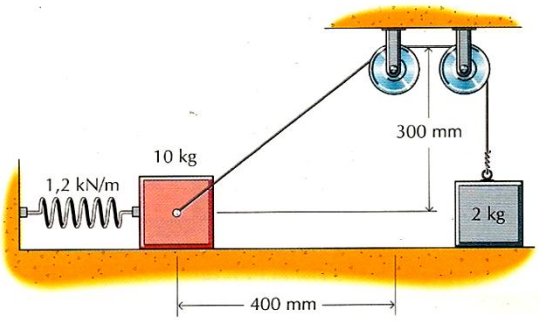
31. Los dos bloques representados en la figura están unidos mediante un hilo inextensible y sin peso. La superficie horizontal y el poste vertical carecen de rozamiento. En la posición que se muestra, el bloque de *10 N* lleva una velocidad de *1,5 m/s* hacia la derecha. Determine, para el ulterior movimiento, la máxima distancia a la que ascenderá, desde su posición inicial, el bloque de *25 N*.



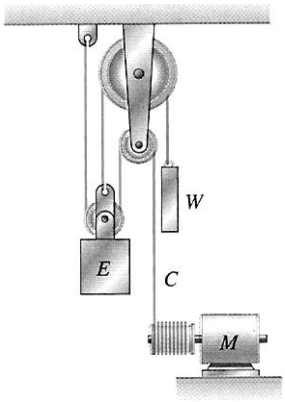
32. Los dos bloques A y B de *25 N* y *50 N*, de peso, respectivamente, mostrados en la figura están unidos mediante un cable inextensible y sin peso. Se sueltan partiendo del reposo, siendo *d = 4 cm*. Si e resorte de constante *k = 333 N/m* se halla sin deformar en la posición inicial. Determine la velocidad que lleva el bloque B cuando impacta contra el piso.



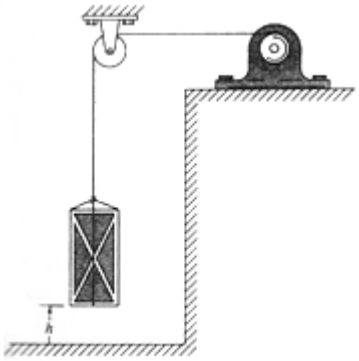
33. Los dos bloques mostrados en la figura están unidos mediante un cable flexible e inextensible y sin peso Si se sueltan desde el reposo en la posición mostrada, en la que el resorte se encuentra estirado *15 mm* y despreciando el rozamiento. Para el ulterior movimiento, determine la máxima distancia sobre el suelo que ascenderá el bloque de *2 kg*



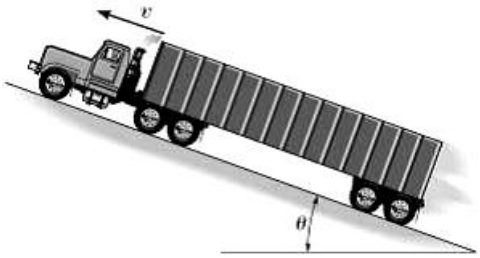
34. A plena carga el montacargas E tiene una masa de *3000 kg* y está unido como se muestra al contrapeso W de masa *1000 kg*. Hallar la potencia en kW que desarrolla el motor (a) cuando el montacargas desciende con una velocidad constante de *3 m/s* una deceleración de *0,5 m/s*.



35. Un motor sube un huacal que tiene una masa de 60 kg hasta la altura *h = 5 m* en *2 s*. Si la potencia indicada del motor es de *3200 W*, determine la eficiencia del motor. El huacal es subido con una rapidez constante.



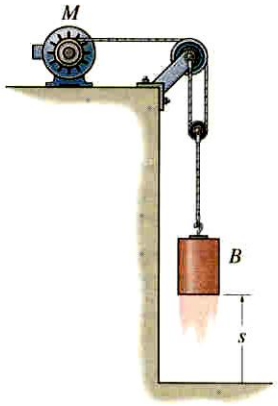
36. Un Camión tiene una masa de *12 Mg* y una máquina que transmite una potencia de *260 kW* a todas las ruedas no deslizan sobre el piso, determine el mayor ángulo θ del plano inclinado que el camión puede ascender a una rapidez constante de *v = 8 m/s*.



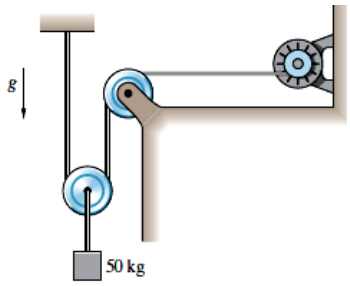
37. Un automóvil que tiene una masa total de *m = 2 Mg* viaja hacia arriba de una pendiente con una rapidez constante de *v = 100 km/h*. Si se van a despreciar la fricción y la resistencia del viento, determine la potencia desarrollada por el motor si el automóvil tiene una eficiencia mecánica *e = 0,65*.

38. La carga de 50 lb de peso es levantada por el sistema de poleas y el motor M. Si la caja inicia su movimiento desde el reposo cuando *s = 0* y se mueve con aceleración constante. Si la caja alcanza una velocidad de 15 pies/s después de haberse elevado una distancia s = 6 pies. Determine la potencia que es preciso proporcionar al motor en ese instante. El

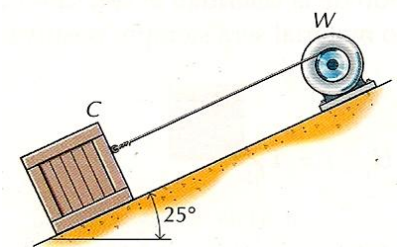
motor tiene una eficiencia η = 0,76. Desprecie la masa de las poleas y los cables en los cálculos.



39. El motor eléctrico mostrado en la figura puede subir un bloque de 50 k de masa una distancia de 3 m en 3 s, a velocidad constante. Si la eficiencia del motor es de 60%. Determine la potencia de entrada del motor.

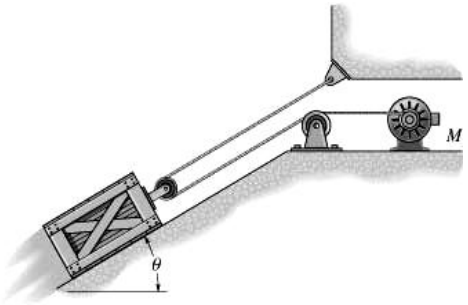


40. Una caja C que pesa *2 kN* está unida a un torno W como se muestra en la figura. Si el coeficiente de rozamiento cinético entre la caja y el plano inclinado es *0,20* y la máxima potencia que puede desarrollar el torno es *368 W*. Determine la máxima celeridad constante a la cual podrá hacer subir la caja.

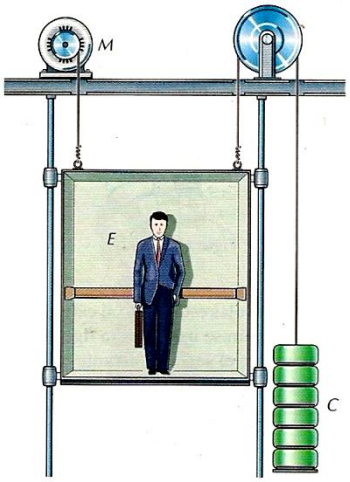


41. La suma de todas las fuerzas retardadoras que se ejercen sobre al automóvil de *1200 kg* que se mueve con una celeridad *v* viene dada por $F_R = 200 - 0{,}8v^2$, donde la fuerza se expresa en newton y la velocidad en *m/s*. Determine la potencia que debe entregarse a las ruedas para moverse: (a) a *40 km/h* en una carretera llana, (b) a *80 km/h* en una carretera llana y (c) a 40 km/h en un carretera inclinada 5°

42. El huacal, que tiene una masa *m = 50 kg*, es jalado hacia arriba del plano inclinado $\theta = 30^o$ mediante el sistema de poleas y el motor M. Si el huacal parte del reposo, y mediante una aceleración constante, adquiere una rapidez de *v = 4 m/s* después de recorrer *s = 8 m*, a lo largo del plano inclinado, determine la potencia que debe suministrarse al motor en el instante en que el huacal se ha movido *s = 8 m*. Desprecie la fricción a lo largo del plano. El motor tiene una eficiencia de *e = 0,74*.

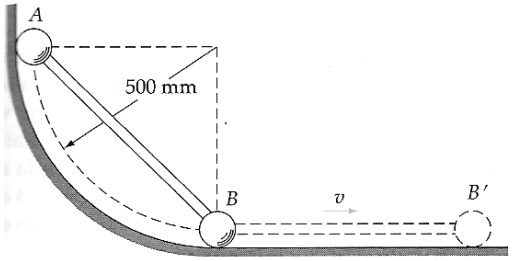


43. Un ascensor E está unido mediante un cable inextensible a un contrapeso C de 900 kg. El conjunto hombre ascensor tiene una masa de 100 kg. El motor M unido al ascensor mediante otro cable , lo hace subir y bajar. Determine la potencia que ha de desarrollar el motor si el ascensor. (a) sube con celeridad constante de 0,5 m/s y (b) baja con celeridad constante.

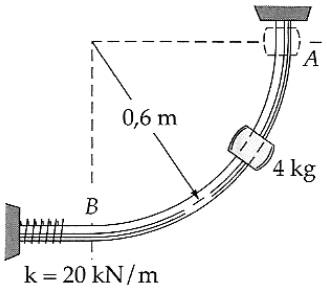


44. Las dos varillas de masas iguales están unidas por una varilla de masa despreciable. Si se abandonan desde el reposo en la posición indicada y se deslizan sin rozamiento por la guía vertical plana, determine

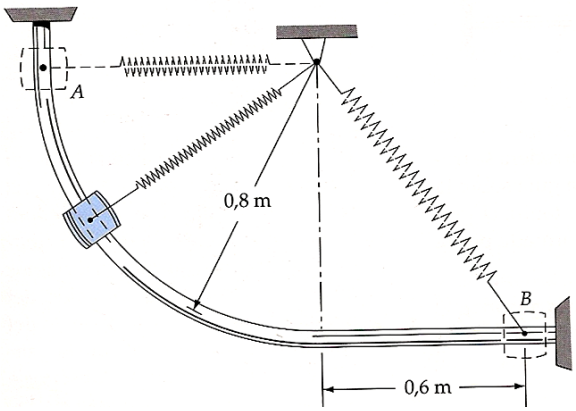
su velocidad *v* cuando A llega a la posición B y ésta se encuentre en B'.



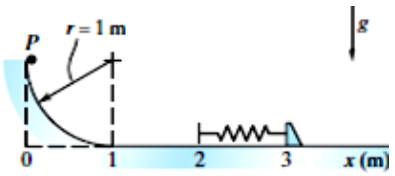
45. La corredera de *4 kg* se abandona desde el reposo en A y se desliza con rozamiento despreciable por la varilla circular vertical. Halle: (a) la velocidad *v* de la corredera cuando llega al punto más bajo y (b) la deformación máxima *x* del resorte.



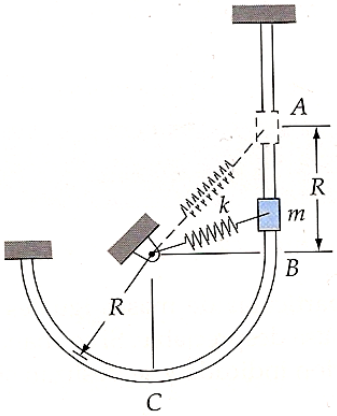
46. El resorte tiene una longitud natural de *0,4 m* y una constante de *200 N/m*. La corredera unida a él se suelta desde el reposo en el punto A y se mueve en el plano vertical. Determine la velocidad *v* de la corredera cuando llega a la posición B en ausencia de rozamiento.



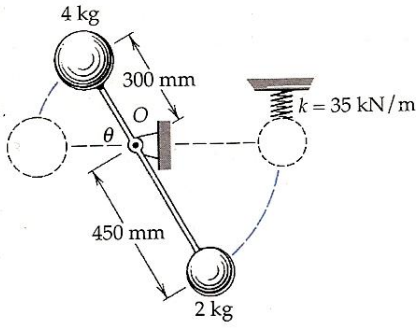
47. Una partícula P de *5 kg* de masa es liberada desde el reposo en la posición mostrada y desliza hacia abajo por la pista con rozamiento despreciable hasta chocar contra de un resorte en $x = 2m$. Sabiendo que el resorte es lineal y tiene una constante $k = 400\ N/m$. determine la velocidad de la partícula cuando el resorte se ha comprimido una distancia de *0,8 m*.



48. Cuando la corredera de masa m pasa por B, el resorte de constante k tiene una longitud natural. Si la corredera parte del reposo en A, halle su celeridad cuando pase por el punto B y C. ¿Qué fuerza normal ejerce la guía sobre la corredera en la posición C?. Desprecie el rozamiento entre la corredera y la guía, la cual está en un plano vertical.

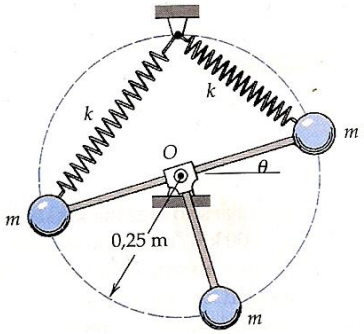


49. La barra liviana está articulada en O a un eje de giro y lleva las dos masas puntuales de *2 kg* y *4 kg*. Si la barra se abandona del reposo en $\theta = 60^o$ y oscila en el plano vertical, determine: (a) la velocidad v de la masa de *2 kg* inmediatamente antes de chocar con el resorte en la posición marcada a trazos y (b) la compresión máxima x del resorte. Se supondrá que x es pequeña de modo que la posición de la barra cuando comprime al resorte es prácticamente horizontal.

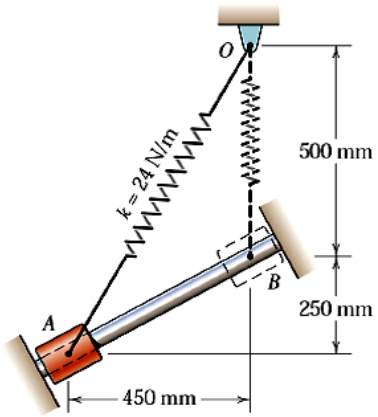


50. Los dos resortes, ambos de rigidez $k = 1,2\ kN/m$, tienen longitudes iguales y están sin deformar cuando $\theta = 0^o$. Si el mecanismo parte del reposo en la posición $\theta = 20^o$, halle su velocidad angular ω cuando $\theta = 0^o$. La masa m de cada esfera es *3 kg*. Tratar las

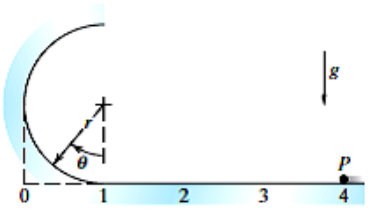
esferas como partículas y despreciar las masas de las varillas y de los resortes.



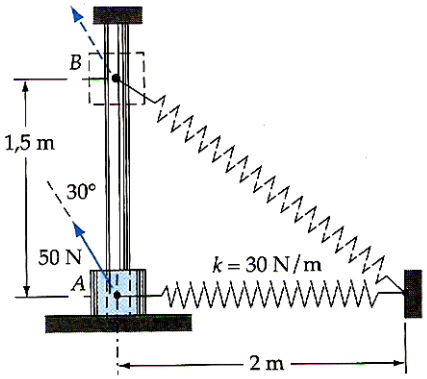
51. El cilindro de *0,9 kg* se abandona desde el reposo en y se desliza libremente por la varilla hacia arriba, chocando con el tope B a la velocidad *v*. La longitud natural del resorte de rigidez *k = 24 N/ m* es *375 mm*. Determine *v*.



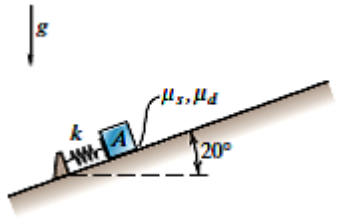
52. Una partícula P de *4 kg* de masa es lanzada en la posición indicada con una velocidad de *7,95 m/s* y se mueve a lo largo de la rampa con fricción despreciable. Sabiendo que el radio de curvatura de la porción curva es *r = 1,5 m.* Determine el ángulo al cual la partícula pierde contacto con la rampa



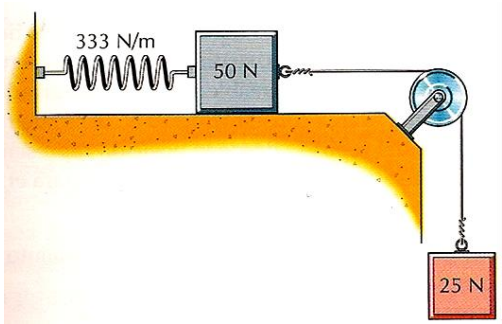
53. La masa del anillo es *2 kg* y el mismo está unido al resorte de masa despreciable cuya rigidez es *30 N/m* y longitud natural *1,5 m*. El anillo se suelta en A desde el reposo y sube por el vástago liso bajo la acción de la fuerza constante de *40 N*. Determine la velocidad *v* del anillo cuando pasa por la posición B.



54. El bloque A de 50 g es presionado contra un resorte lineal de constante k = 100 N/m de tal manera que la deformación es 10 cm. Si repentinamente se libera el bloque y desliza sobre la pendiente rugosa cuyos coeficientes de fricción son μ_s = 0,60 y μ_k = 0,30. ¿Qué distancia viajará el bloque sobre la pendiente hasta alcanzar el reposo momentáneo?.

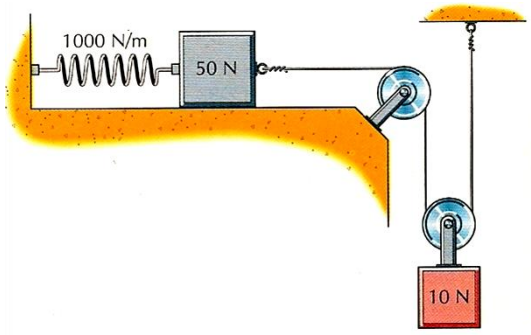


55. Los dos bloques representados en la figura están unidos mediante un hilo inextensible y sin peso. Se sueltan, partiendo del reposo, cuando el resorte está sin deformar. Los coeficientes de rozamiento estático y cinético valen μ_s = *0,20* y μ_k = *0,10*, respectivamente, determine: (a) la máxima velocidad de los bloques y el alargamiento que en esa condición, sufre el resorte, (b) la máxima caída del bloque de *25 N*.

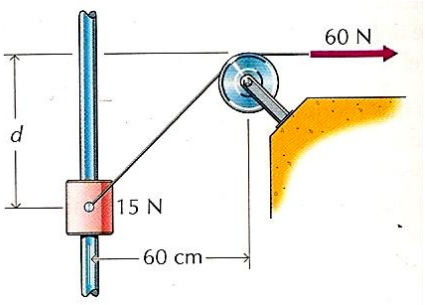


56. Los dos bloques representados en la figura están unidos mediante un hilo inextensible y sin peso. El

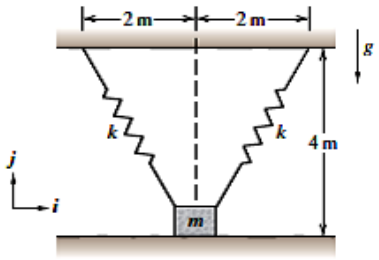
coeficiente de rozamiento entre el bloque de 50 N y el suelo es $\mu_k = 0{,}60$. Si se sueltan los bloques partiendo del reposo cuando el resorte está alargado *375 mm*, determine, para el ulterior movimiento, la máxima velocidad de los bloques y el alargamiento, que esa condición, sufre el resorte.



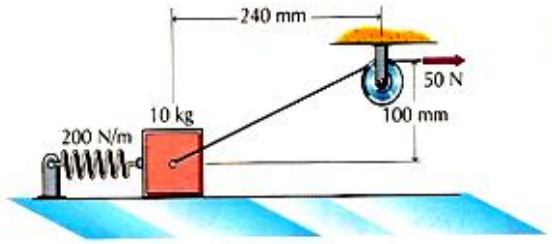
57. Un bloque de *15 N* se desliza por una guía vertical sin fricción, según se indica en la figura. Al extremo del hilo inextensible y sin peso amarrado al bloque, se aplica una fuerza de *60 N*. Si se suelta el bloque, partiendo del reposo, cuando *d = 80 cm*, determine la velocidad del bloque cuando *d = 45 cm*.



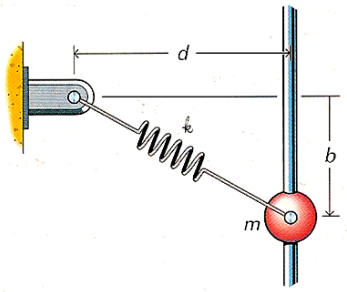
58. Un bloque de 10 kg de masa, conectado por medio de dos muelles de constantes elásticas idénticas k = 80 N/m al techo, es llevado al piso y puesto en libertad. ¿Cuál será la velocidad con la cual impacta contra el techo?. Considere que los resortes tienen una longitud sin deformar de 1,00 m.



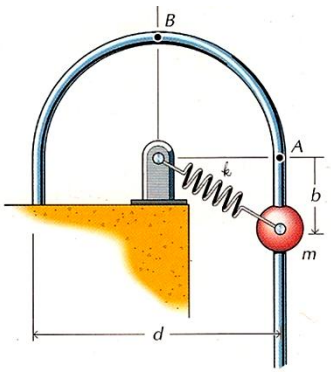
59. Un bloque de *10 kg* se desliza por una superficie horizontal exenta de rozamiento, según se indica en la figura. Al extremo del hilo inextensible y sin peso amarrado al bloque una fuerza constante de *50 N*. Si se suelta el bloque, partiendo del reposo, desde la posición representada en la cual el resorte está sin deformar, determinar para el ulterior movimiento: (a) La máxima velocidad del bloque y el alargamiento que, esa condición, sufre el resorte y (b) el alargamiento máximo que sufre el resorte.



60. Una cuenta de masa *0,5 kg* se desliza sin rozamiento por una varilla vertical según se indica en la figura. La longitud natural del resorte es $L_0 = 300$ *mm y la* distancia *d = 300 mm*. Si se suelta la masa partiendo del reposo cuando *b = 0*, determine la constante del resorte que haga $b_{max} = 400$ *mm.*

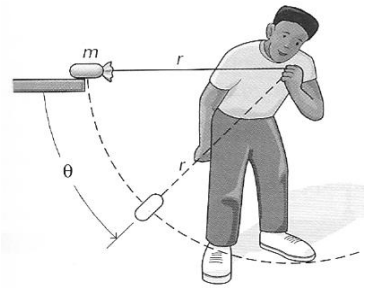


61. Una masa de *0,5 kg* se desliza por una varilla exenta de rozamiento y situada en un plano vertical, según se indica en la figura. La longitud natural del resorte es $L_0 = 250$ *mm* y su constante es *k = 600 N/m* y la distancia *d = 800 mm*. Si se suelta dicha masa partiendo del reposo cuando *b = 300 mm*. Determine su celeridad: (a) en la posición A y (b) en la posición B.

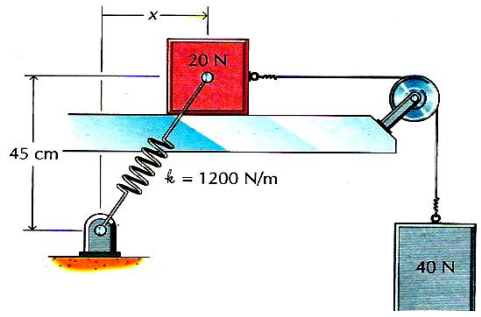


62. Un saquito que contiene *1,5 kg* de bolitas está sujeto al extremo de un hilo de *800 mm* de longitud, según se indica en la figura. La máxima tensión que puede

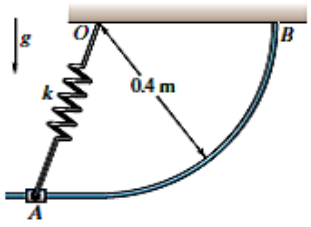
resistir el hilo es $P_{máx} = 30\ N$. Si el muchacho saca lentamente el saco del estante, determine el ángulo θ que girará el saco antes de romper e hilo.



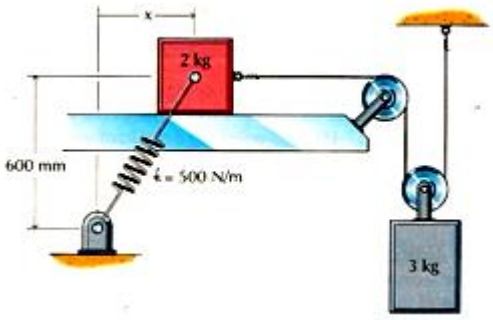
63. El par de bloques representado en la figura está conectado mediante un hilo inextensible y sin peso. El resorte tiene una constante $k = 1200\ N/m$ y una longitud natural $L_0 = 30\ cm$. El rozamiento es despreciable. Si se suelta el sistema del reposo en $x = 0$. Determine. (a) La celeridad de los bloques cuando $x = 10\ cm$, (b) El máximo desplazamiento x que alcanzará en el ulterior movimiento.



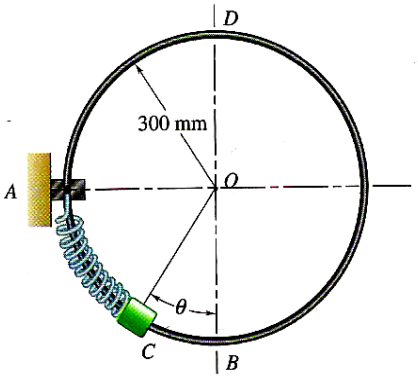
64. El collarín A de *0,5 kg* puede deslizar libremente por la guía mostrada ubicada en un plano vertical. El resorte lineal de masa despreciable conectado a O tiene una constante elástica $k = 30\ N/m$ y una longitud sin deformar $L_0 = 100\ mm$. Si es liberado desde el reposo cuando $OA = 700\ mm$. ¿Llegará el collarín hasta B?. Si es así ¿Con qué velocidad pasará por B?



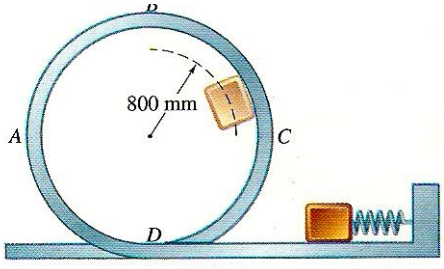
65. El par de bloques representado en la figura está conectado mediante un hilo inextensible y sin peso. El resorte tiene una constante $k = 500\ N/m$ y una longitud natural $L_0 = 400\ mm$. El rozamiento es despreciable. Si se suelta el sistema del reposo en $x = -800\ mm$, determine. (a) La celeridad de los bloques cuando $x = 0$, (b) El máximo desplazamiento x que alcanzará en el ulterior movimiento.



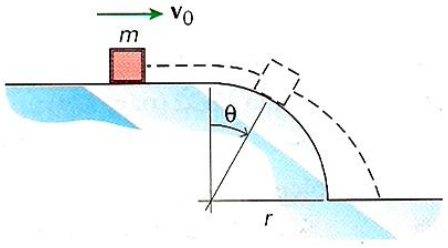
66. Una varilla circular delgada se mantiene inmóvil en un plano vertical merced a un soporte A. Unido a éste, y arrollado holgadamente alrededor de la varilla, hay un muelle de constante $k = 44\ N/m$ y longitud natural igual a la del arco AB. Un cursor C de *225 g*, no unido al muelle, puede deslizar sin rozamiento por la varilla. Sabiendo que el cursor se suelta desde el reposo cuando $\theta = 30°$. Determine. (a) la altura máxima a la que llega el cursor por encima de B, (b) su velocidad máxima.



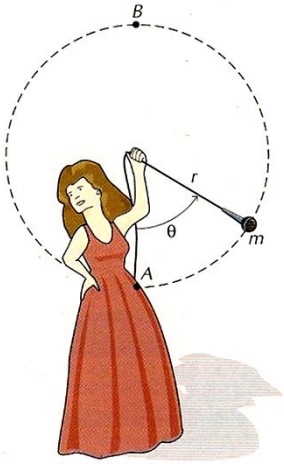
67. El bloque de *300 g* se suelta desde el reposo tras haberse comprimido *160 mm* el muelle de constante $k = 600\ N/m$. Halle la fuerza ejercida por el rizo ABCD sobre el bloque cuando éste pasa por: (a) el punto A, (b) el punto B, (c) el punto C. desprecie la fricción.



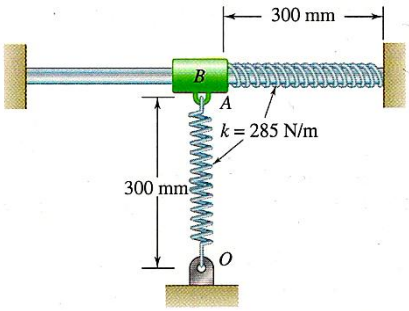
68. Una cajita se desliza por una superficie horizontal exenta de fricción y llega a una rampa circular, como se muestra en la figura. Si la celeridad inicial de la caja es $v_0 = 1{,}5\ m/s$ y $r = 375\ mm$. Determine el ángulo θ al cual la caja perderá el contacto con la rampa



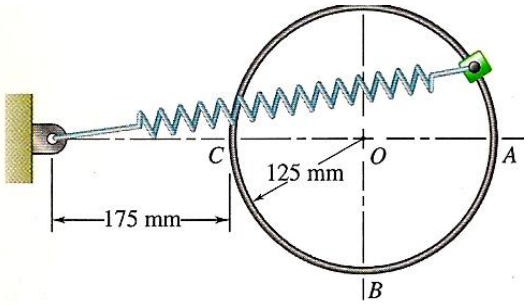
69. Una cantante hace girar un micrófono de *0,35 kg* situado al extremo de un hilo de *750 mm* de longitud en un plano vertical, determine. (a) la mínima celeridad que debe tener el micrófono en la posición A para poder recorrer toda la trayectoria circular y (b) la máxima tensión del hilo.



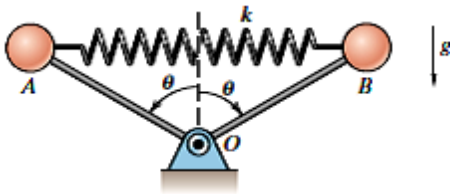
70. Una corredera B de *4,5 kg* puede deslizarse por una guía horizontal lisa y está en equilibrio en A cuando recibe un desplazamiento de *125 mm* hacia la derecha y se suelta. Ambos resortes tienen una longitud natural de *300 mm* y una constante $k = 280\ N/m$. Determine: (a) la velocidad máxima de la corredera y (b) la aceleración máxima.



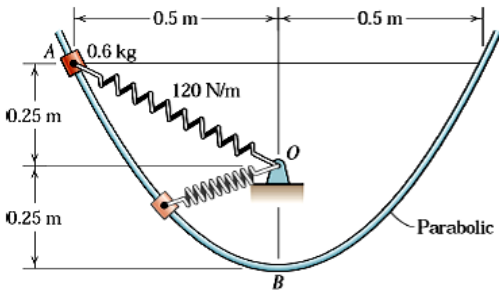
71. Una corredera de *1,5 kg* está unida a un muelle y desliza por una guía circular lisa situada en un *plano vertical*. El resorte tienen una longitud natural de *150 mm* y una constante $k = 400\ N/m$. Sabiendo que la corredera está en equilibrio en A cuando recibe un leve empellón para ponerla en movimiento. Determine su velocidad cuando: (a) pasa por el punto B y (b) pasa por el punto C. Si la corredera se encuentra en un plano horizontal ¿Cuál sería sus respuestas?.



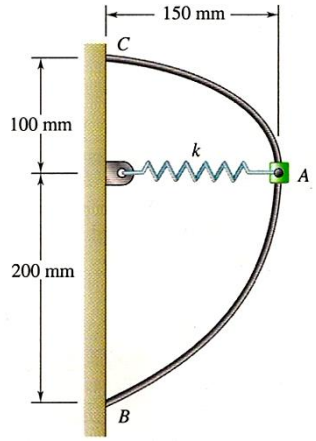
72. Do péndulos invertidos idénticos están unidos por un resorte de constante k = 42 N/m y longitud sin deformar de 1,23 m. Las masas de las esferas puntuales A y B son de 2 kg cada una y la varillas imponderables tienen longitudes OA = OB = 1,2 m. Si las dos varillas se desvían un ángulo θ = 60° y se liberan desde el reposo. Determine la velocidad de cada esferita cuando θ = 45°.



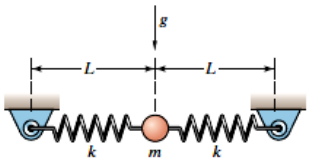
73. La corredera de *0,6 kg* parte del reposo en A y se desliza por la guía parabólica lisa (contenida en un plano vertical) bajo la influencia de su propio peso y del resorte de constante $k = 120\ N/m$ y cuya longitud natural es *200 mm*. Determine: (a) la rapidez de la corredera cuando pase por B y (b) la fuerza normal que la guía ejerce sobre la corredera.



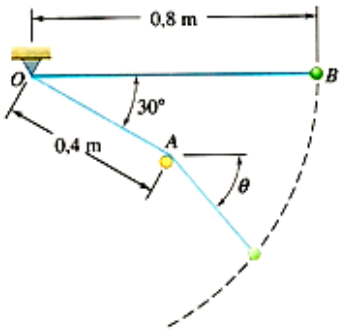
74. Una corredera de *500 g* desliza por la guía curva lisa BC situada en un plano horizontal. Sabiendo que la longitud natural del resorte es *80 mm* y *k = 400 N/m*. Determine: (a) la velocidad que en A debe comunicarse a la corredera para que llegue a B con velocidad nula y (b) su velocidad cuando finalmente llega a C



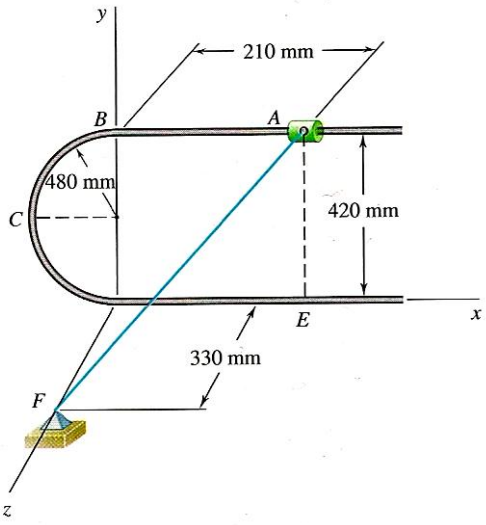
75. Una partícula de *0,5 kg* de masa es unida a los extremos de dos resortes lineales idénticos cuyas constantes elásticas es *k = 60 N/m* y longitudes sin deformar *L = 100 mm* como se muestra en la figura. Si la masa se libera desde el reposo en la configuración. ¿Cuál será la velocidad de *m* cuando la masa ha descendido *40 mm*?.



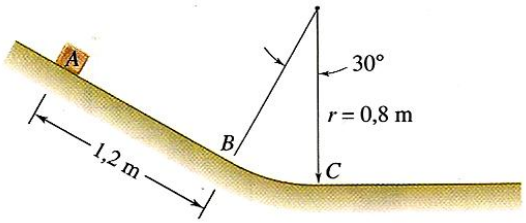
76. Una pequeña esfera B de masa m se suelta desde el reposo en la posición indicada y oscila libremente en un plano vertical, primero en tono a O y luego en torno a la espiga A cuando el hilo entra en contacto con la misma. Determine la tensión en el hilo: (a) justo antes que el mismo entre en contacto con la espiga y (b) justo después de entrar en contacto con la espiga.



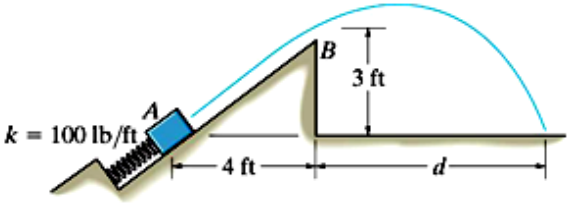
77. Una corredera de *1,2 kg* puede deslizarse por la varilla representada. Está unida a un cordón elástico amarrada en F, cuya longitud natural es de *2,7 m* con una constante recuperadora de *73 N/m*. Sabiendo que la corredera se suelta desde el reposo en A y depreciando la fricción. Determine la celeridad de la corredera: (a) en A y (b) en E.



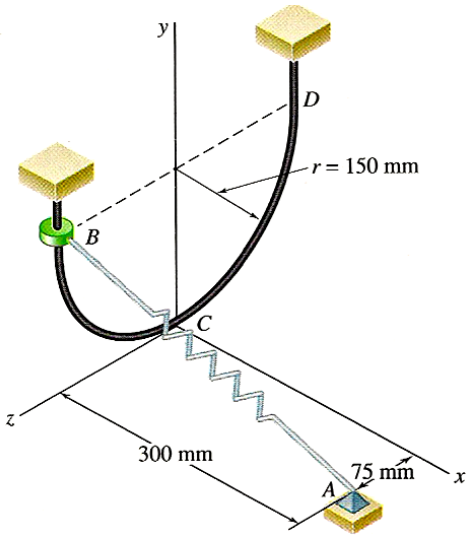
78. Una pastilla de *300 g* se suelta desde el reposo en A y desliza sin rozamiento por la superficie representada. Determine la fuerza que sobre ella ejerce la superficie: (a) justo antes de que llegue a A, (b) inmediatamente después de pasar por B, (d) justa antes de llegar a C y (d) inmediatamente después de que pase por C.



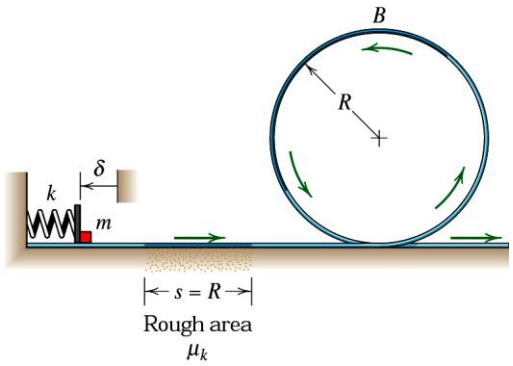
79. El bloque de 10 lb es presionado contra el resorte de tal manera que éste se encuentra comprimido 2 pies cuando está en la posición A. Si el plano inclinado es liso. Determine la distancia *d*, medida desde la base del muro en donde el bloque chocara contra el piso. Desprecie el tamaño del bloque en los cálculos.



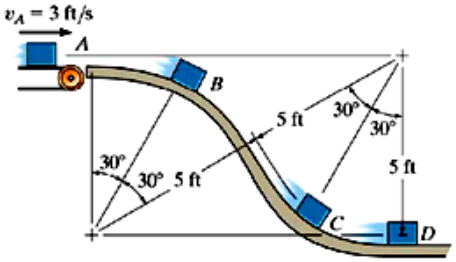
80. Un cursor de *540 g* puede deslizarse por la guía semicircular lisa BCD. El muelle tiene una constante de *320 N* y una longitud natural de *200 mm.* Sabiendo que el cursor se suelda desde el reposo en B. Determine: (a) su velocidad al pasar por C y (b) la fuerza que en C le ejerce la guía.



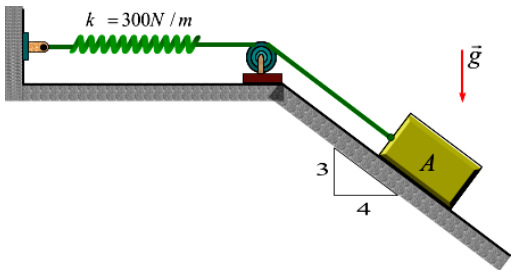
81. El resorte de constante ***k*** se comprime y se suelta de repente, haciendo que la partícula de masa ***m*** salga resbalando por la pista. Determine la mínima compresión δ del resorte para la cual la partícula no pierde contacto con el tramo rizado de la pista. La superficie de la pista es lisa a excepción del tramo rugoso de longitud ***s = R***, donde el coeficiente de fricción cinética es μ_k.



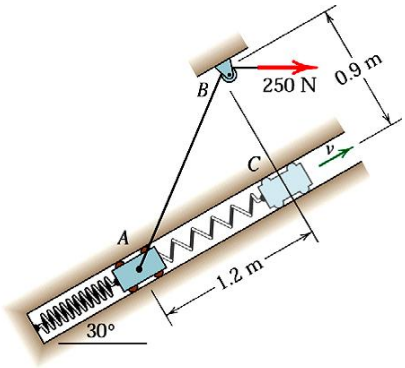
82. Cada uno de los paquetes que tienen *50 lb* de peso son liberados en el extremo de una polea usando una faja transmisora con una rapidez $v_A = 3$ *pies/s*, como se muestra en la figura. Determine: **(a)** la velocidad de los paquetes cuando alcancen los puntos B, C y D, **(b)** la fuerza normal que la pista ejerce sobre los paquetes en las pociones A, B y C. Desprecie la fricción y el tamaño de los paquetes.



83. El coeficiente de fricción entre el bloque A de *50 kg* mostrado en la figura y el plano inclinado es *0,25*. La constante del muelle es *300 N/m* y en la configuración el resorte se encuentra estirado *0,30 m.* Determine el trabajo que ejercen cada una de las fuerzas que actúan sobre el bloque cuando éste se mueve una distancia de 1,5 m sobre el plano inclinado en la dirección de descenso.

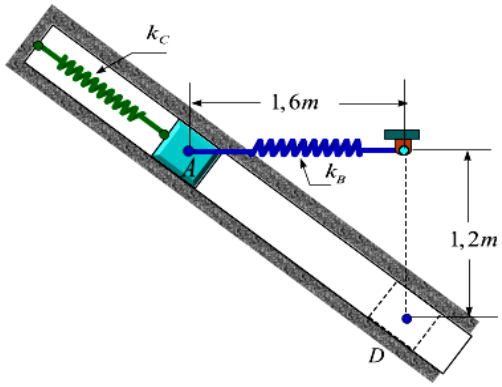


84. La corredera A de *10 kg* se mueve sin rozamiento en un plano vertical a lo largo de la guía inclinada. El resorte unido a ella tiene una constante de *60 N/m* y está sometido a un alargamiento de *0,6 m* en la posición A, desde la que se suelta la corredera partiendo del reposo. Se aplica una fuerza constante de *250 N* a una cuerda que pasa por una polea pequeña en B. la polea no ofrece resistencia al movimiento de la cuerda. Determine la velocidad *v* de la corredera cuando pasa por el punto C.

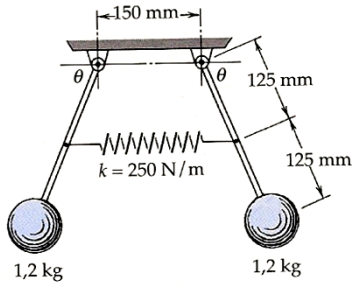


85. El bloque A de *20 kg* mostrado en la figura se mueve en una ranura lisa ubicada en un plano vertical. Las

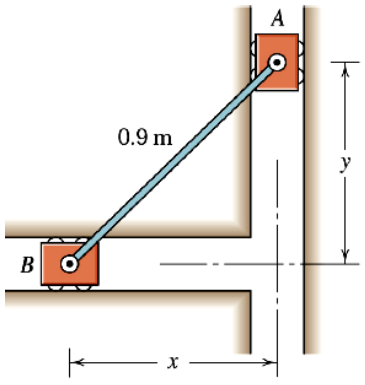
constantes de los muelles B y C son de *1000 N/m* y *500 N/m*, respectivamente. En la posición definida en la figura el muelle B se encuentra estirado *0,8 m*, mientras que el muelle C no se encuentra deformado y la velocidad del bloque es de *10 m/s* en la dirección de descenso en la ranura. Determine la velocidad del bloque A cuando pase por la posición D



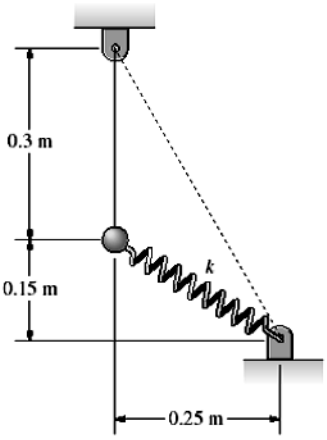
86. Las dos barras iguales de masa despreciable parten a la vez del reposo en θ = *30°*. Determine la velocidad v de cada esfera de 1,2 kg cuando θ = 90°, posición en la cual el resorte tiene su longitud natural.



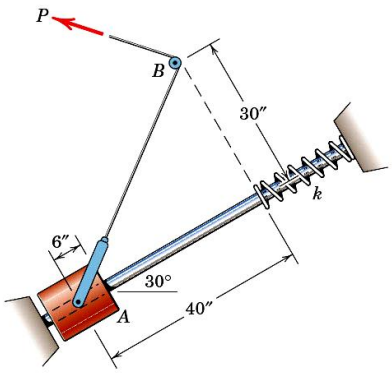
87. Dos corredera A y B de igual masa unidas por la barra de masa despreciable, se mueven sin rozamiento apreciable por sus guías respectivas, situándose y en la dirección vertical, como se muestra en la figura. Si el sistema se abandona del reposo cuando *x = y*. Determine la máxima velocidad de la corredera B.



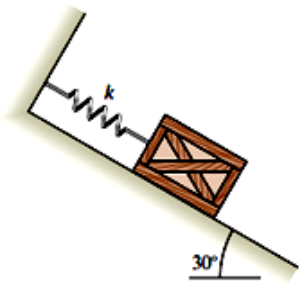
88. Una esferita de masa ***m = 1 kg*** es sostenida en la posición mostrada por una cuerda de longitud ***L = 3 m*** y un resorte de contante ***k = 200 N/m*** cuya longitud sin deformar es ***0,1 m***. Si la esferita se abandona desde el reposo en posición que se indica, el resorte se contrae moviendo a la esfera hacia la derecha. **(a)** Determine la magnitud de la velocidad de la esfera cuando la cuerda y el resorte son paralelos. **(b)** ¿Cuál es la tensión de la cuerda en este instante?.



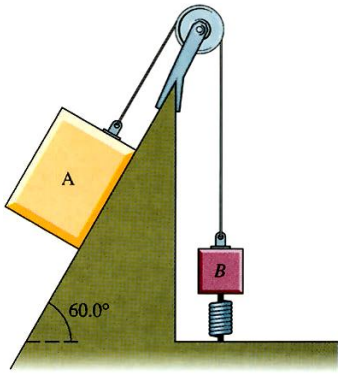
89. El collar A de *30 lb* de peso desliza sin rozamiento apreciable por la barra inclinada un ángulo de *30°* con la horizontal como se muestra en la figura. Cuando el collar parte del reposo en la posición más baja, indicada en la figura, se mueve bajo la acción de una fuerza constante *P = 50 lb* aplicada al extremo del cable que pasa por una polea lisa en B. Determine la constante de rigidez ***k*** del resorte para que la compresión de éste quede limitada sólo a *6 pulgadas*. Considere que *b = 30 pulgadas* y *d = 40 pulgadas*.



90. Una caja de *40 N* de peso es soltada desde el reposo sobre la superficie inclinada lisa cuando el resorte de constante *k = 8 N/m* está sin deformar. (a) ¿Cuán lejos deslizará la caja sobre la superficie antes de llegar a detenerse? y (b) ¿Cuál será la velocidad máxima que alcance la caja durante su movimiento?.

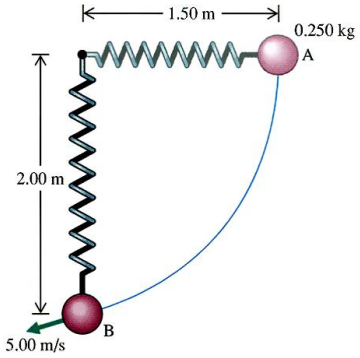


91. Dos bloques están unidos a los extremos opuestos de una cuerda que pasa sobre una polea carente de fricción y de masa despreciable como se muestra en la figura. El bloque A de *10 kg* de masa se encuentra sobre un plano inclinado *60°* cuyo coeficiente de fricción cinética es $\mu_k = 0{,}50$, y el bloque B de *1,00 kg* de masa unido a un resorte cuya constante de rigidez es $k = 200$ *N/m*. Si los bloques están inicialmente en reposo con el resorte en equilibrio. Determine la máxima altura que subirá B una vez que se libere.

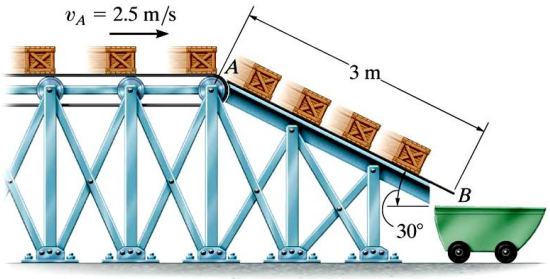


92. El bloque de *50 lb* reposa sobre la superficie rugosa para el cual el coeficiente de fricción cinética es $\mu_k = 0{,}20$. Una fuerza $F = (40 + x^2)$ *lb*, donde x es la posición en pies, actúa sobre el bloque en la dirección mostrada. Si el resorte inicialmente esta sin deformar cuando $x = 0$ y el bloque se encuentra en reposo. Determine la potencia desarrollada por la fuerza en el instante en que el bloque se ha movido *1,5 pies*.

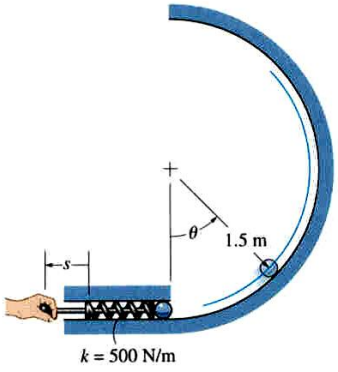
93. Una esferita pequeña de *0,25 kg* de masa está unida al extremo de un resorte de masa despreciable y de constante desconocida. La masa es liberada desde el reposo en el punto A, con el resorte inicialmente no deformado. Conforme la esferita cae el resorte se estira como se muestra en la figura. Determinar: (a) la constante de rigidez del resorte y (b) la magnitud de la aceleración de la esferita cuando ésta pasa por el punto B.



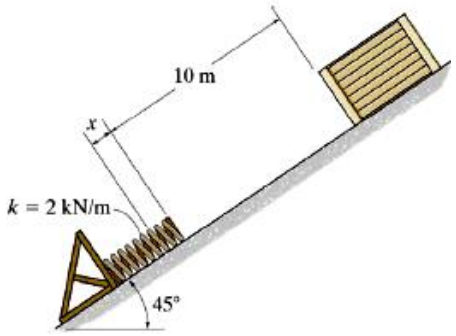
94. La banda transportadora hace llegar cada caja de 12 kg a la rampa en A de tal forma que la rapidez de la caja es $v_A = 2$ *m/s*, dirigida hacia abajo sobre la rampa. Si el coeficiente de fricción cinética entre cada caja y la rampa es $\mu_k = 0{,}25$. Determine la rapidez de cada una de las cajas cuando abandonan la rampa y caen al carro B.



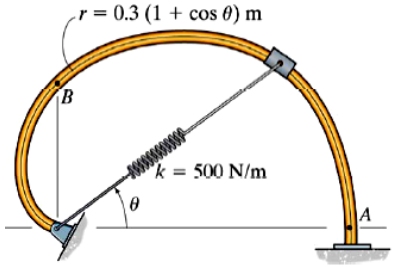
95. La esferita de tamaño despreciable y de 0,5 kg de masa, es disparada hacia arriba por una pista circular, utilizando el disparador de resorte. Dicho disparador mantiene comprimido el resorte 0,08 m cuando s = 0. Determine la distancia s que podemos jalar al disparador y liberarlo de tal manera que la esfera comience a abandonar la trayectoria cuando $\theta = 135°$.



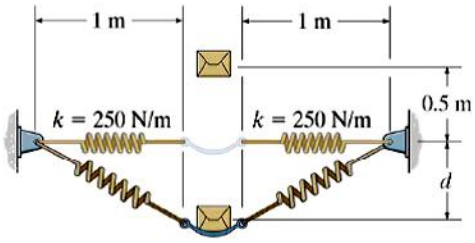
96. Si el coeficiente de rozamiento cinético entre la caja de 100 kg y el plano inclinado es μ_k = 0,25. Determine la rapidez de la caja en el instante en que la compresión del resorte es x = 1,5 m. Inicialmente el resorte está sin deformar y la caja está en reposo.



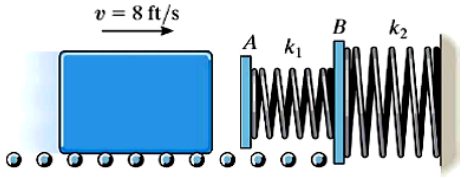
97. El collar de 5 kg mostrado en la figura desliza a lo largo de la barra curva lisa ubicada en el plano vertical como se muestra en la figura. Si el collar se suelta desde el reposo en A. Determine la velocidad del collar cuándo este pase por la posición B. Considere que el resorte tiene una longitud natural de 200 mm.



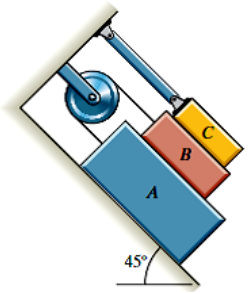
98. La ondilla de masa despreciable es unida a dos resortes idénticos de constante *k = 250 N/m* como se muestra en la figura. Si una caja de 10 kg es liberada desde el reposo a una altura de *0,5 m* sobre el cuero, determine el máximo desplazamiento ***d*** de la caja. Considere que inicialmente cada uno de los resortes tienen una tensión de *50 N*.



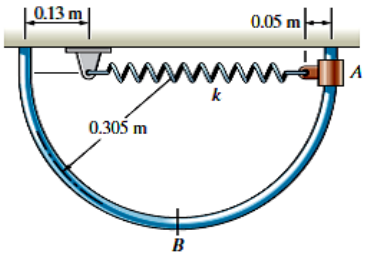
99. Se utiliza el tope de doble resorte para detener la barra de acero de *1500 lb* en la banda de rodillos. Determine la deflexión máxima de la placa A a causa del golpe con la barra si ésta tiene una rapidez de *8 pies/s*. desprecie la masa de los resorte, rodillos y de las placas A y B. Considere que k_1 = 3000 lb/pie y k_2 = *4500 lb/pie*.



100. Las masas de los tres bloque mostrados en la figura son m_A = *40 kg;* m_B = *16 kg* y m_C = *12 kg*. Despreciando la masa de la barra que mantiene en reposo a C y considerando insignificante el rozamiento entre bloque. Aplicando el principio trabajo- energía cinética por separado a los bloques A y B, determine sus velocidades cuando se hayan movido *500 mm*, ¿Cuál sería la magnitud de la velocidad de A y B cundo se hayan movido *500 mm* si el coeficiente de rozamiento para todas las superficies de contado es μ_k = *0,10*?.

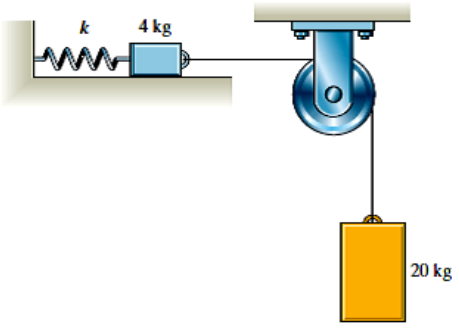


101. Se le da una velocidad de 6 m/s hacia abajo al collarín de 5 N de peso cuando está en A. Si cuando el collarín pasa por la posición B su rapidez es de 15 m/s. Determine la constante de rigidez de resorte k, sabiendo que tiene una longitud natural de 0,254 m.



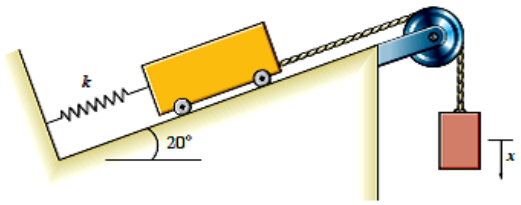
102. El sistema mostrado en la figura es liberado desde el reposo cuando el resorte de constante *k = 100 N/m* se encuentra sometido a una tensión de *50 N*. Despreciando la fricción entre el bloque de 4 kg y la superficie horizontal y utilizando el principio trabajo-energía- cinética, determine las magnitudes de las velocidades de las masas cuando el bloque de *20 kg* ha descendido *1,00 m*. ¿Cuál sería las velocidades si el coeficiente de fricción cinética entre

el bloque de 4 kg y la superficie horizontal es μ_k = *0,40?*.

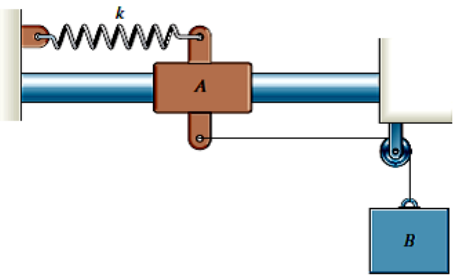


103. Resuelva el problema 52, si el coeficiente de fricción cinética entre la caja y la superficie inclinada es μ_k = *0,20*.

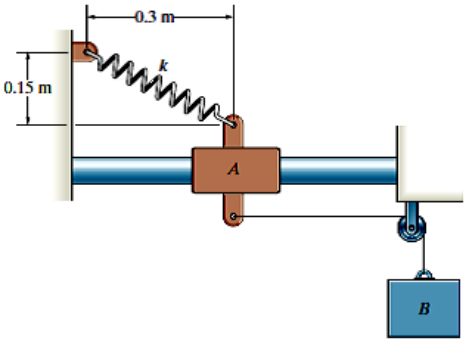
104. El sistema mostrado en la figura es liberado desde el reposo cuando el resorte de constante *k = 800 N/m* se encuentra sin deformar. Despreciando la fricción entre el carrito de *4 kg* y la superficie inclinada y utilizando el principio trabajo-energía - cinética, determine las magnitudes de las velocidades de los cuerpos cuando el bloque de *20 kg* ha descendido *0,5 m*.



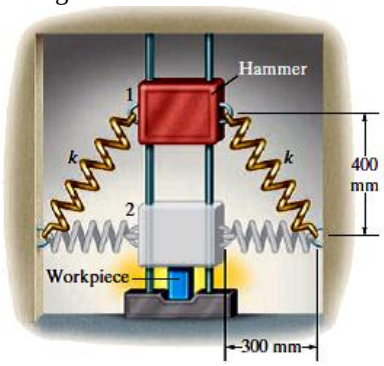
105. El collar A de *30 N* de peso desliza sobre la barra horizontal lisa. En el instante mostrado en la figura, el resorte de constante *k = 40 N/m* esta sin deformar y el bloque B de *60 N* de peso está moviéndose hacia abajo con una rapidez de *4 m/s*. determine la velocidad del bloque B cuando éste se ha movido *2,00 m* a partir de su posición inicial.



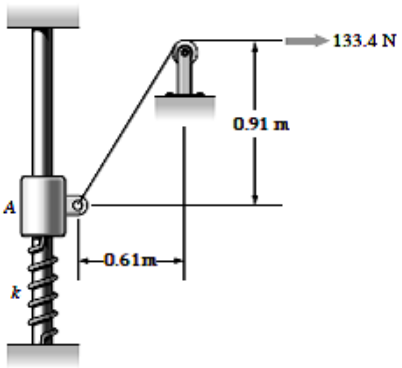
106. El collar A *de 14 kg* de masa desliza sobre la barra horizontal lisa. En el instante mostrado en la figura, el resorte de constante *k = 700 N/m* esta sin deformar y el bloque B de *18 kg* de masa está moviéndose hacia abajo con una rapidez de *1,00 m/s*. ¿Cuál será la magnitud de la velocidad del bloque B cuando éste se ha movido 0,*2 m* a partir de su posición inicial?.



107. El martillo de *40 kg* es levantado hasta una altura de 400 mm y liberado desde el reposo en la posición **1**. Si un instante antes de golpear a la pieza de trabajo posición **2** la velocidad del martillo es de *4 m/s*. Determinar el valor requerido de la constante de rigidez del *k* de cada uno de los resortes idénticos si tienen una longitud natural de *300 mm*.

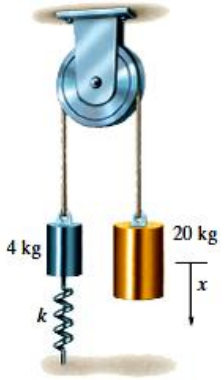


108. El sistema está en reposo en la posición mostrada, con el collarín de *53,4 N* descansando sobre el resorte de constante *k = 292 N/m*. Si se aplica una fuerza constante de *133,4 N* al extremo del cable. Determine la velocidad del collarín cuando ascendió *0,305 m*. a partir de su posición inicial.

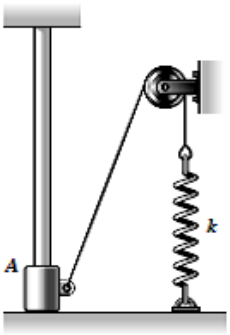


109. La fuerza ejercida sobre un automóvil de *5000 N* por una barrera contrachoques al golpear el automóvil contra ésta es $F = -(120s + 40s^3)N$, donde s es la distancia medida en metros desde el punto de contacto inicial de contacto. Si longitud efectiva de la barrera es *18 m*. ¿Con que rapidez se estará moviendo el automóvil un instante antes de entrar en contacto con la barrera si se desea que el auto llegue al reposo después de recorrer toda la longitud efectiva?.

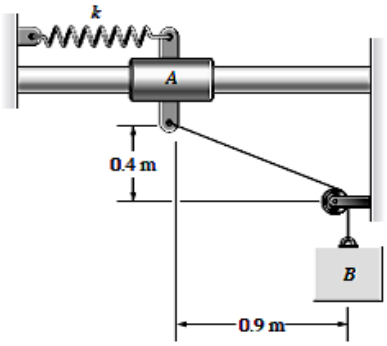
110. El sistema mostrado en la figura es liberado desde el reposo cuando el resorte de constante k = 200 N/m.. Determine la velocidad del cilindro de *20 kg* cuando este ha descendido *1,00 m*.



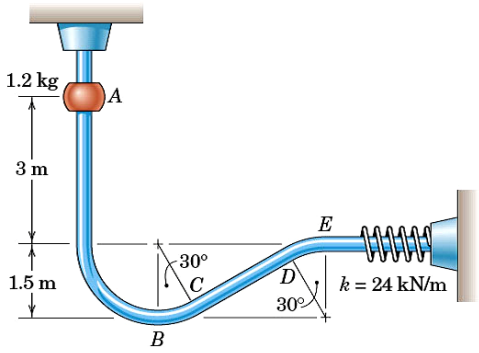
111. Un collarín de *1 kg* está unido con una cuerda a un resorte lineal cuya constante es *k = 500 N/m*. El collarín inicia su movimiento desde el reposo en la posición mostrada, y la tensión inicial en la cuerda es de *100 N*. ¿Qué distancia vertical recorrerá el collarín sobre la barra?.



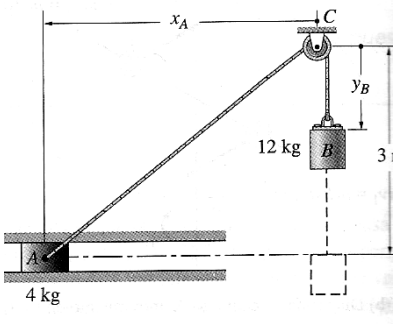
112. El collar A de *40 kg* se encuentra unido al bloque B de *60 kg* con una cuerda que pasa por una polea carente de peso y fricción despreciable, como se muestra en la figura. Si el sistema es liberado desde el reposo cuando el resorte de constante *k = 850 N/m* está sin deformar en la posición indicada. Determine la velocidad del collar A cuando este se ha movido *0,5 m* hacia la derecha.



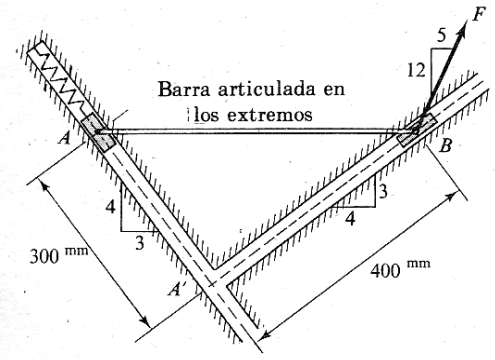
113. El collarín de 1,2 kg mostrado en la figura se suelta desde el reposo en la posición A y desliza sin fricción a lo largo de la guía. Determine: (a) la velocidad v_B del collarín cuando pasa por la posición B y (b) la máxima deflexión δ del resorte.



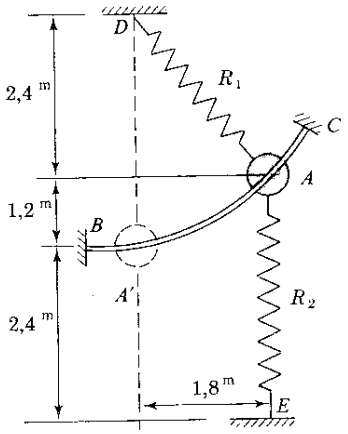
114. Los bloques A y B están unidos por un cable que tiene una longitud de 6,5 m y pasa por una pequeña polea lisa C. Si el sistema se suelta desde el reposo cuando x_A = 4 m, determine la velocidad de A cuando B llega a la posición que se muestra por medio de líneas interrumpidas. Desprecie la fricción.



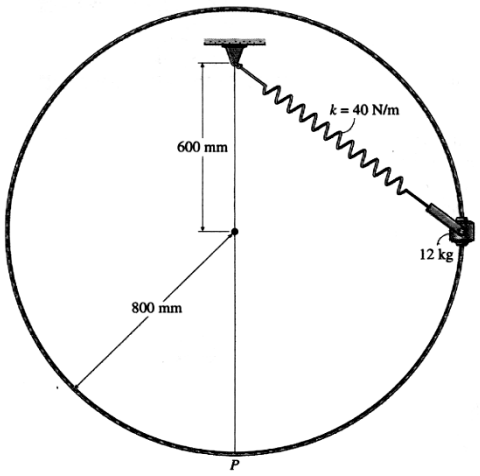
115. Los dos bloques A y B de *20 kg* cada uno mostrados en la figura están conectados mediante una barra rígida de *500 mm* y masa despreciable, y se mueven en ranuras lisas. En la posición representada el bloque A desciende con una velocidad igual a *0,2 m/s* y el resorte de constante *K = 3000 N/m* está comprimido 100 mm. La magnitud y dirección de la fuerza *F = 500 N* no varía durante el movimiento. Determine la velocidad del bloque A cuando se encuentra en el punto A' o sea después de descender *300 mm.*



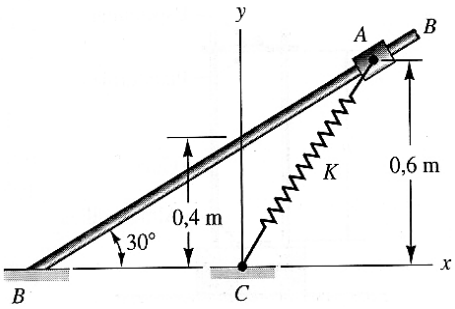
116. La esfera de *60 kg* representada en la figura está restringida a moverse en la barra lisa BC y está conectado a los resortes R_1 y R_2. El módulo de R_1 es *600 N/m* y su longitud libre es *2 m*. El módulo de R_2 es *300 N/m* y su longitud libre es *2,5 m*. En la posición A la velocidad de la esfera es *3 m/s* en el sentido de descenso. Determine la velocidad de la esfera cuando llega a la posición A'.



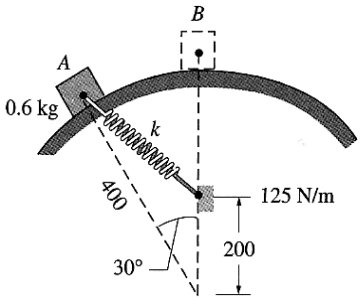
117. Estando en reposo, se suelta un collar de *12 kg* sobre una varilla guía lisa, de forma circular, en la posición en que se muestra. El resorte tiene una longitud natural sin deformación de *800 mm* y un módulo de *40 N/m*. Determine. (a) la velocidad del collar cuando pase por el punto P y (b) La fuerza que la varilla ejerce sobre el collar en P



118. Un cuerpo A de *5 kg* de masa puede deslizar a lo largo de la barra fija B-B. Un resorte conecta el punto fijo C con la masa. Cuando el resorte no presenta deformación tiene una longitud de *600 mm*. Si el cuerpo, inicialmente en reposo, se suelta en la configuración que se muestra. ¿Cuál será la velocidad cuando el collar alcance el eje y?. Suponga que sobre la masa A actúa una fuerza de rozamiento constante de *1,6 N*. La constante del resorte vale k = *200 N/m*.

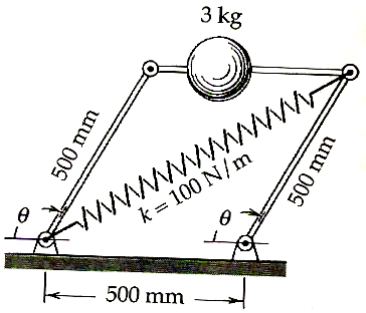


119. La masa de *0,6 kg* se desliza con fricción despreciable en la superficie cilíndrica. El resorte unido a la masa tiene una rigidez de *125 N/m*, y su longitud libre es de *100 mm*. Si la masa se suelta desde el reposo en A, determine su velocidad en B.

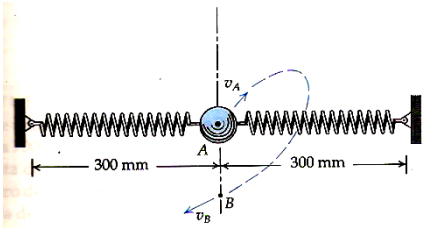


120. El mecanismo articulado de barras mueve a la esfera de *3 kg* y el resorte tiene su longitud natural cuando *θ = 90°*. Si el mecanismo parte del reposo en *θ = 90°*, calcular la velocidad de la esfera cuando pasa por la posición *θ = 135°*. Las barras están en el plano

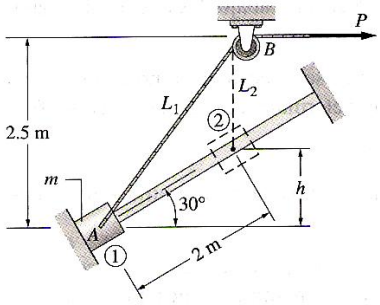
vertical y sus masas son pequeñas y pueden despreciarse.



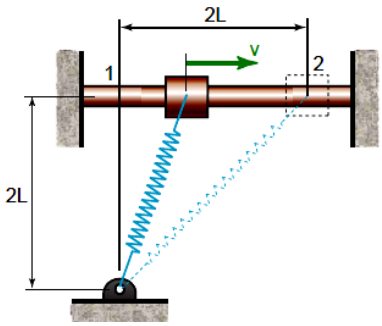
121. En la posición A, correspondiente al estado no deformado de los dos resortes horizontales, la esfera de *1,5 kg* recibe una velocidad inicial v_A = *2,5 m/s* en el plano vertical. La esfera describe la trayectoria señalada con trazo discontinuo y pasa por el punto B, a *125 mm* directamente por debajo de A, Calcular la velocidad v_B cuando pasa por B. La rigidez de cada resorte es *1800 N/m.*



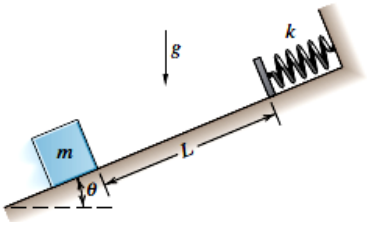
122. El collarín de masa 1,8 kg que se muestra en la figura se desliza en una barra sin fricción que se encuentra en el plano vertical. Una cuerda está atada en A y pasa sobre una polea en B. La fuerza P horizontal constante se aplica al extremo de la cuerda. El collarín se suelta desde el reposo en la posición "1". **(a)** Determine la rapidez del collarín en la posición "2" si el módulo de la fuerza **P** es de 20 N. **(b)** Encuentre el mínimo valor de **P** para que el collarín llegue a la posición "2".



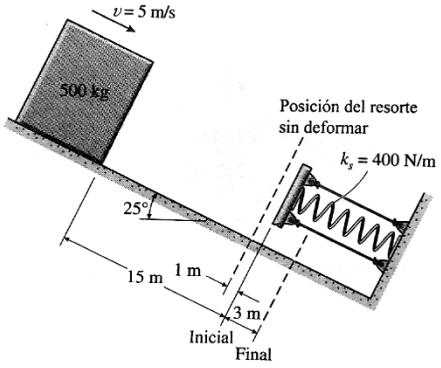
123. El collar A es lanzado desde la posición **1** con una velocidad inicial de v_0. Si el collar se encuentra unido a un resorte de constante *k* y cuya longitud sin deformar es *2L*. Determine la velocidad del collar cuando este pasa por la posición *2*.



124. Un bloque de *2 kg* de masa es lanzado con una velocidad *v = 2,5 m/s,* en la posición indicada en la figura y se mueve sobre un plano inclinado $\theta = 30°$ moviéndose una distancia *L = 5 m* hasta chocar contra de un resorte de constante k. Si la compresión máxima está limitada a *10 cm*. Determine la contante de rigidez del resorte.

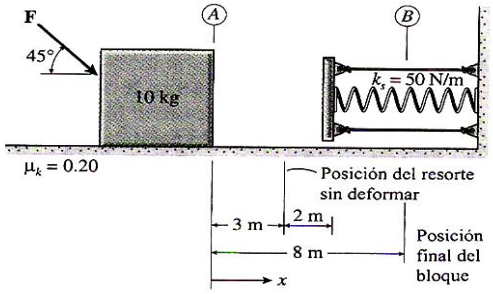


125. Se emplea un resorte para detener un bloque de *500 kg* cuando se desliza hacia debajo de una superficie rugosa inclinada *25º*. El resorte de constante de rigidez *k = 400 N/m* está comprimido inicialmente *1 m*. Si la velocidad del bloque es *5 m/s* cuando está a *15 m* del resorte y la deformación adicional del resorte al llevar al reposo al paquete es de *3 m*. Halle el coeficiente de fricción cinética entre el bloque y la superficie.

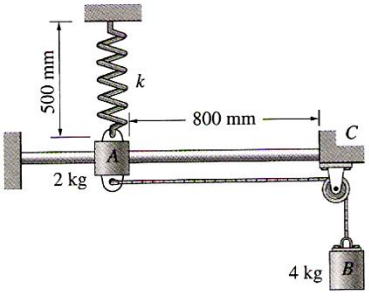


126. El bloque de 10 kg está sujeto a la acción de una fuerza que tiene la dirección constante que se indica y una magnitud $F = 250(+x\,\vec{N})$, en donde x se mide en metros. Si el coeficiente de rozamiento cinético entre el bloque y la superficie horizontal es μ_K= *0,20*, determine el trabajo efectuado por todas las fuerzas

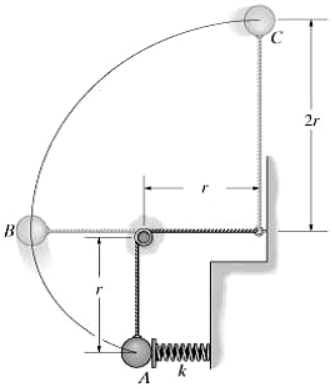
que actúan en el bloque durante un movimiento de éste de A hasta B.



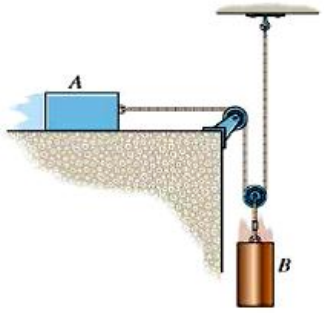
127. Un collar corredizo A y el bloque B se conectan mediante una cuerda inextensible. El resorte unido con A tiene una rigidez K = 400 N/m, y su longitud libre es L_0 = 200 mm. En la posición que se muestra, la velocidad de A es v_A a la derecha. Si A debe llegar al tope C con velocidad cero. Determine v_A. Desprecie la fricción.



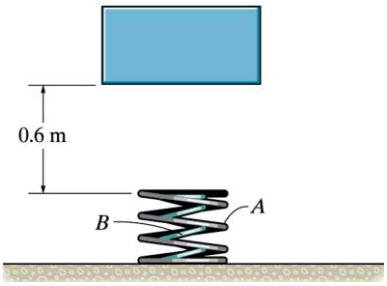
128. El peso de un péndulo tiene una masa de *0,75 kg*. Se dispara desde la poción A mediante un resorte de constante *k = 6 kN/m* y que se encuentra comprimido *125 mm*. Determine la rapidez del peso y la tensión en la cuerda cuando está en las posiciones B y C. El punto B se localiza sobre la trayectoria donde el radio de curvatura es aún de *r = 0,6 m.*



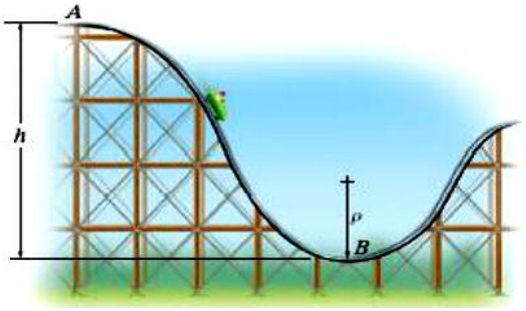
129. El bloque A de *3 lb* reposo sobre una superficie horizontal rugosa cuyo coeficiente de fricción cinética es μ_k = *0,30*. Si el sistema se suelta desde el reposo. Determine, la distancia que recorrerá el bloque B de *8 lb* de tal manera que el bloque A alcance una velocidad v_A = *5 pies/s*.

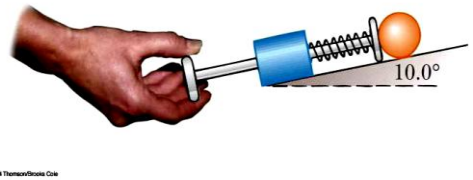


130. Dos resortes A y B de igual longitud se encuentran *"anidados"* con la finalidad de formar un amortiguador de impacto. Si se le diseña para detener una masa de *2 kg* que se deja caer desde una altura de *0,6 m* sobre la parte superior de los resortes como se muestra en la figura, y la máxima compresión de los resortes es *0,25 m.* Determine la rigidez del resorte interior $\boldsymbol{k_B}$, si el resorte exterior A tiene una rigidez k_A = *500 N/m*.

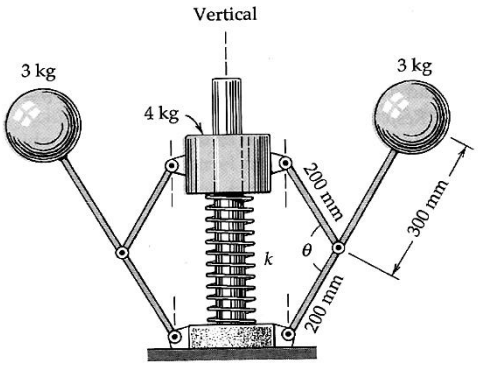


131. Si el carro de la montaña rusa tiene una rapidez v_A = 5 pies /s cuando se encuentra en A y desciende por la pista gracias a la sola inercia. Determine la rapidez v_B cuando pasa por el punto B. ¿Cuál será la fuerza normal que un pasajero de 150 lb ejerce sobre el carro cuando está en B. En este punto una trayectoria definida por $y = x^2/200$. Desprecie la fricción, la masa de las ruedas y el tamaño del carro y considere que h = 150 pies. ($g = 32{,}2$ pies/s^2)

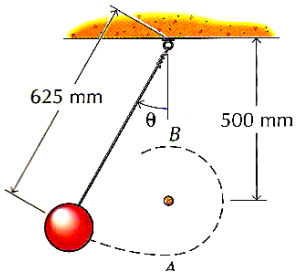
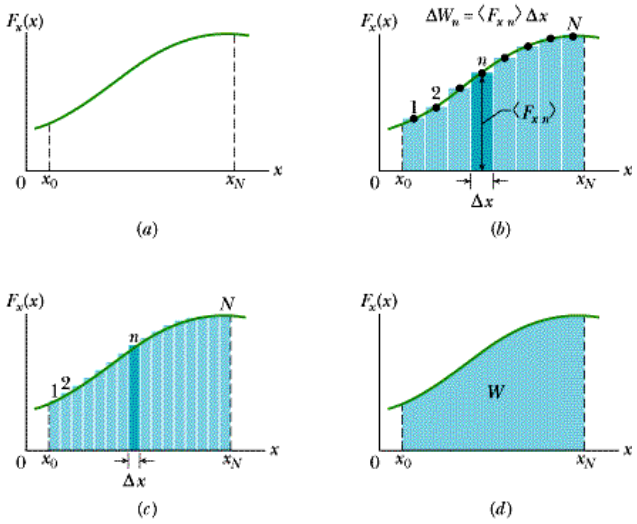




132. El mecanismo se suelta desde el reposo con θ = 180º, en que el resorte no comprimido de rigidez k = 900 N/m está iniciando el contacto con la base inferior del anillo de 4 kg. Halle el ángulo θ correspondiente a la máxima compresión del resorte. El movimiento tiene lugar en el plano vertical y la masa de las barras puede despreciarse.



133. El movimiento de a lenteja de un péndulo, de 20 N de peso, lo perturba una pequeña espiga situada directamente debajo del péndulo de suspensión como se muestra en la figura. Si el péndulo tiene una celeridad angular de 3 rad/s cuando θ = 75º, determine la tensión del hilo: (a) En la posición A y (b) en la posición B.



134.